This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

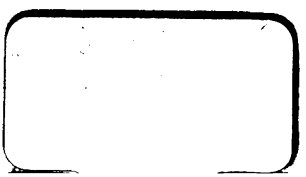
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909168 8



I. 9

Die Anfangsgründe

der

Zahlen- und Raumgrößen-Lehre.

Als Leitfaden

für den mathematischen Unterricht an den Königlichen Artillerie-Brigade-Schulen, so wie zum Selbst-Unterricht für die Avancirten der Artillerie bearbeitet

von

F. M. Rost,

Premier-Lieutenant in der III. Artillerie-Brigade und Lehrer der Mathematik an der Oberfeuerwerker-Schule in Berlin.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK

Mit 3 Figuren-Tafeln.

Berlin,

bei G. Eichler.

1842.

Seiner Königlichen Hoheit

dem Prinzen

Adalbert von Preußen

in tiefſter Ehrerbietung zugeeignet.

Durchlauchtigſter Königlicher Prinz!
Gnädigſter Prinz und Herr!

Eure Königliche Hoheit haben in der Tendenz dieſes Lehrbuchs:

„beſonders den Avancirten der Artillerie bei deren Studien nützlich zu werden"

den Beweggrund gefunden, die Dedication deſſelben huldreichſt anzunehmen, und hierdurch aufs Neue die hohe Fürſorge bethätiget, mit welcher Höchſtdieſelben jedes wiſſenſchaftliche Streben im Bereiche der Waffe gnädigſt zu unterſtützen geruhen. Möchten Eure Königliche Hoheit

auch gnädigst Veranlassung finden, mit Billigung auf vorliegendes, Höchst-Ihnen zugeeignetes Werkchen zu blicken.

Eurer Königlichen Hoheit

ganz unterthänigster
Moritz Rost.

Inhalt.

Die Lehre von den Zahlen.

Seite

Einleitung 13

Erster Theil der Zahlenlehre.

Die Lehre von den unbenannten Zahlen.

I. Abschnitt. Von den vier Elementar-Operationen mit ganzen absoluten Zahlen.

Erstes Kapitel. Die Addition und Subtraction 25
Zweites Kapitel. Die Multiplication und Division . . . 41
Drittes Kapitel. Von den vorzüglichsten Eigenschaften der numerischen Zahlen 64

II. Abschnitt. Von den vier Elementar-Operationen mit Brüchen.

Viertes Kapitel. Von den gewöhnlichen Brüchen 73
Fünftes Kapitel. Von den Dezimalbrüchen 85

III. Abschnitt. Von den vier Elementar-Operationen mit Rechnungsformen.

Sechstes Kapitel. Regeln f. d. Rechnen mit Rechnungsformen 97
Siebentes Kapitel. Von den algebraischen Summen . . 102

IV. Abschnitt. Von dem sogenannten Ausziehen der Wurzeln.

Achtes Kapitel. Vom Ausziehen der Quadratwurzeln . . . 109
Neuntes Kapitel. Vom Ausziehen der Kubikwurzeln . . 118

Zweiter Theil der Zahlenlehre.

Die Lehre von den benannten Zahlen.

V. Abschnitt. Von den vier Elementar-Operationen mit benannten Zahlen.

Zehntes Kapitel. Von der Reduction der benannten Zahlen 126
Elftes Kapitel. Die Addition u. Subtraction d. ben. Zahlen 132
Zwölftes Kapitel. Die Multiplication u. Division d. ben. Zahlen 136

Seite

VI. Abſchnitt. Die Proportionen und ihre Anwendung auf practiſche Rechnungen.

Dreizehntes Kapitel. Von den arithmetiſchen und geometriſchen Proportionen 143
Vierzehntes Kapitel. Von der einfachen und zuſammengeſetzten Regula de tri 155
Funfzehntes Kapitel. Von der Zinsrechnung, Rabattrechnung und der Kettenregel 169
Sechszehntes Kapitel. Von der Geſellſchafts- und Alligations-Rechnung 182

Die Lehre von den Raumgröſzen.

Einleitung 201

Erſte Abtheilung. Die ebene Geometrie.

Erſtes Kapitel. Von den Linien und Winkeln. 204
Zweites Kapitel. Von den Dreiecken 215
Drittes Kapitel. Von den vierſeitigen Figuren ꝛc. . . . 227
Viertes Kapitel. Vom Kreiſe und den regulären Polygonen 235
Fünftes Kapitel. Von der Inhaltsbeſtimmung der geradlinigen Figuren und des Kreiſes 243
Sechstes Kapitel. Von der Aehnlichkeit der Dreiecke . . 251

Zweite Abtheilung. Die körperliche Geometrie.

Siebentes Kapitel. Von den einfachen Körpern 260
Achtes Kapitel. Von der Berechnung der Kugelhaufen . . 272

Dritte Abtheilung. Das practiſche Aufnehmen ohne Winkelmeß-Inſtrumente.

Neuntes Kapitel. Aufgaben des practiſchen Feldmeſſens . 275
Zehntes Kapitel. Vom Krokiren, Nivelliren und Profiliren 284

Vorrede.

Soll der mathematiſche Unterricht, in der Ausbildung des Verſtandes und in der Befähigung für das practiſche Leben, ſeinem Zwecke vollkommen entſprechen, ſo muß er den Lernenden frühzeitig anregen, den geiſtigen Zuſammenhang der Wiſſenſchaft aufzufaſſen, denn nur hierdurch gelangt derſelbe zu einer klaren Ueberſicht und zu einem dauerhaften Wiſſen, während ein mühſames und zeitraubendes Auswendiglernen gewöhnlich nur ein vereinzeltes Wiſſen begründet, oder auch ein baldiges Vergeſſen des Erlernten zur Folge hat. Von dieſem Geſichtspunkte ausgehend, konnte der Verfaſſer über die Methode, nach welcher ſein Lehrbuch abzufaſſen ſei, keinen Zweifel hegen und er beſtimmte ſich daher für die ſeit einigen Jahren an den Königlichen Artillerie-Schulen, ſo wie am Kadettenhauſe zu Berlin gebräuchliche, neuere Lehrmethode.

Hierbei kam es aber darauf an die Vorzüge dieſer Methode, welche namentlich in der conſequenten Herausſtellung des innerer Zuſammenhanges der Wiſſenſchaft, ſo wie in einer weſentlichen Vereinfachung der Herleitung und der Beweisführung beſtehen, dem im Denken und Abſtrahiren noch wenig geübten Verſtande, vermittelſt einer leicht faßlichen Form, zugänglicher und durch vielfache, dem individuellen Bedürfniß gemäße, Anwendungen auch practiſch nützlich zu machen. Die

gleichzeitige Bestimmung dieses Lehrbuchs für den Selbstunterricht machte ferner eine entsprechende Ausführlichkeit nothwendig und der Verfasser hofft auch in dieser Beziehung nichts verabsäumt zu haben, was die Liebe zum mathematischen Studium bei dem Anfänger anzuregen und zu befördern geeignet sein möchte.

Für eine zweckfördernde Benutzung dieses Lehrbuchs mögen noch folgende Andeutungen hier einen Platz finden.

Die allgemeine, durch Buchstaben bezeichnete, Zahl ist es, welche uns Gelegenheit giebt, die Sätze der Zahlenlehre in der kürzesten und anschaulichsten Form auszudrücken. Gewöhnlich aber hegt der Anfänger, welcher zeither nur gewöhnt war, mit Ziffern zu rechnen, ein Vorurtheil gegen das Rechnen mit Buchstaben, indem er glaubt, letzteres sei schwieriger und erfordere eine besondere Behandlung. Diese Ansicht beruht jedoch auf einem Irrthum, denn wenn z. B. die beiden Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ mit einander multiplicirt werden sollen, so giebt die Ausführung: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, welche Umformung die Regel anschaulich vor die Augen stellt, daß Brüche multiplicirt werden, wenn man sowohl die Zähler als auch die Nenner mit einander multiplicirt. Dagegen giebt $\frac{9}{2} \cdot \frac{5}{12}$, mittelst des Einmaleins, die gemischte Zahl $1\frac{7}{8}$, aus welcher Umformung die Regel des Multiplicirens, wegen des Ineinanderschmelzens der bestimmten Zahlen, nicht hervortritt. Eine Bezeichnungsweise, die also das Resultat des Multiplicirens auch ohne das Einmaleins erzielen und nächstdem die Rechnungsregel stets erkennen läßt, kann nur dem durch das Zifferrechnen verwöhnten Anfänger minder einfach und anschaulich erscheinen.

Wenn wir daher das Rechnen mit Buchstaben gleich von Hause aus verlangen, so geschieht solches nur, um dem An-

fänger Gelegenheit zu geben, sich die Regeln der Zahlenlehre nicht allein gründlicher, sondern auch in kürzerer Zeit anzueignen. Dem aber, welcher, trotz aller vorliegenden Erfahrungen in irrthümlicher Ansicht verharrend, diesen schneller und sicherer zum Ziele führenden Weg verschmäht, bietet sich das Auskunftsmittel dar, überall, wo im Lehrbuche Buchstaben stehen, Ziffern zu setzen.

Das Vorurtheil gegen den Gebrauch der Buchstaben als Zahlenzeichen beruht auch noch darauf, daß man glaubt, es müsse dem Anfänger Schwierigkeiten verursachen, sich unter einem Buchstaben, z. B. unter a, eine Zahl zu denken. Diese Schwierigkeit ist jedoch nur eingebildet und dürfte durch folgende Auffassungsweise leicht gehoben werden können.

Wir haben in der Natur die Mehrheit der Dinge, z. B. eine Menge Bäume, Menschen ꝛc., überall vor Augen, aber wir wissen noch nicht, so lange diese Zahlen ungezählt sind, aus wie vielen Einheiten sie bestehen. Also können wir dieselben auch nicht durch die Ziffern: 2, 3, 4, 5, u. s. w. bezeichnen, sondern wir müssen dafür andere Zeichen wählen, wozu man Buchstaben am geeignetsten fand. Die ungezählte Vielheit wird daher durch einen Buchstaben und die gezählte durch eine Ziffer bezeichnet. Diese Auffassung, wenn gleich nicht allgemein genug, dürfte jedoch vorläufig genügen, um dem Anfänger die Einführung der Buchstaben als Zahlenzeichen begreiflich zu machen.

Für den Vortrag an den Brigadeschulen glaube ich noch darauf hinweisen zu müssen, wie es mit Berücksichtigung des Lehrpensums und der gegebenen Zeit, nicht rathsam erscheinen möchte, bei den im 1sten Kapitel enthaltenen allgemeinen Gesetzen der Addition und Subtraction länger zu verweilen, als das Bedürfniß einer zusammenhängenden Auffassung erheischt.

Es möge daher der Lehrer keineswegs sämmtliche Beweise verlangen, sondern sich vorläufig mit dem vollständigen Verständniß der im §. 22. VII durchgeführten Beweisart begnügen, und eine größere Ausführlichkeit durch spätere Einübungen und Repetitionen zu erstreben suchen. Eine derartige Behandlung des 1sten Kapitels dürfte um so mehr gerechtfertigt erscheinen, als nicht sämmtliche Gesetze der Addition und Subtraction für das practische Rechnen, so weit solches an den Brigadeschulen geübt werden soll, gleich wichtig und unentbehrlich sind. Eben so möchte die Verschiedenheit der Fähigkeiten und der Vorkenntnisse nicht selten rathsam machen, von der, der Kürze und Uebersicht wegen im Lehrbuche festgehaltenen, allgemeinen Darstellungsweise abzugehen, und ich erlaube mir über diesen Punkt die Ansicht der Hochlöblichen Artillerie-Prüfungs-Commission, welcher mein Manuscript zur Beurtheilung vorlag, wörtlich anzuführen:

„Der Lehrer, der dieses Compendium als Leitfaden in die Hand bekommt, wird oft in den Fall kommen, beurtheilen zu müssen, ob es dem Denkvermögen seiner Schüler angemessen sei, das Besondere durch das Allgemeine oder dieses durch jenes zu erklären und deutlich zu machen, in welchem letztern Falle er an Stelle der Buchstaben benannte oder unbenannte Zahlen zu setzen haben wird. In dieser Art behandelt, wird die Vortragsweise auch dem minder fähigen Schüler begreiflich werden, und der fähigere wird darin ein Mittel finden, sich durch Selbststudium zu weiteren Fortschritten vorzubereiten.“

In diesen belehrenden Worten ist alles enthalten, was ich über die Behandlung des Allgemeinen und seine Erweiterung zum Speciellen zu sagen wüßte, und es bleibt mir nur

noch der Wunsch übrig, die Art und Weise, wie der Schüler auf den wissenschaftlichen Zusammenhang scheinbar isolirt stehender Lehren, während des Vortrags, aufmerksam zu machen sein dürfte, durch ein Beispiel näher zu bezeichnen.

Nachdem die Gleichung A. §. 27 abwechselnd mit Buchstaben und Ziffern an die Tafel geschrieben und demnächst bewiesen worden ist, veranlasse der Lehrer den Schüler, dieselbe selbstthätig wieder zu geben. Beim ersten Versuch wird dies nur mangelhaft gelingen und der Lehrer erkläre hierauf, die Gleichung ebenfalls vergessen zu haben, so daß sich die Nothwendigkeit herausstelle, dieselbe, nach §. 27 Anmerkung, wieder zu erfinden. Nachdem diese Erfindung auf analytischem Wege bewerkstelligt worden ist, möge die Gleichung von einem andern Gesichtspunkte aus aufgefaßt und gezeigt werden, daß in ihr die vorzüglichsten Regeln der Bruchrechnung enthalten sind, sobald man nämlich anstatt des Pluszeichens das Multiplications- und anstatt des Minuszeichens das Divisionszeichen setzt.

Hierauf dürfte es zweckdienlich sein, die Umformung: $a + (b - c) = a - (c - b)$ besonders herauszuheben und aus dem speciellen Fall, daß a Null, c aber eine größere Zahl als b vorstellt, den Begriff des Subtrahirens in seiner allgemeineren Bedeutung zu folgern, so wie, nach §. 30. N. 17, die negative Zahl, als Resultat der Subtraction einer größeren Zahl von einer kleineren, hervortreten zu lassen.

Bei einer derartigen Behandlung dürfte es wohl nicht fehlen, daß selbst der beschränktere Verstand das innere geistige Leben der ihm, in allgemeinen Zahlenzeichen, vorgeführten Lehren erkennt, und zu dieser Bezeichnungsart und Darstellungsweise das nöthige Zutrauen gewinnt, während ein bloßes Hinstellen für das Gedächtniß und demnächstiges mechanisches Einüben denselben nur abschrecken und in keiner Art geistig an-

regen würde. Endlich möge noch darauf aufmerksam gemacht werden, daß die vorliegenden Anfangsgründe für den Selbstunterricht eine größere Ausdehnung erhalten haben, als der Unterricht an den Brigadeschulen bestimmungsmäßig in Anspruch nimmt. Die Herren Lehrer an diesen Schulen werden daher eine, den Bestimmungen entsprechende Auswahl zu treffen haben und nächstdem, die Bedeutung formaler Ausbildung und die Beschränktheit der Kräfte und der Zeit erwägend, mehr Geist weckend und befruchtend wirken und zu weiterem Lernen und Fortschreiten befähigen, als eine nutzlose, ja oft schädliche Oberflächlichkeit hinstellen wollen ohne Zusammenhang, Gründlichkeit und Behältlichkeit des Wissens und ohne Befähigung zur Anwendung und Erweiterung des Gelernten;

non multa, sed multum.

Berlin den 15. September 1841.

Der Verfasser.

Die Lehre von den Zahlen.

Einleitung.

§. 1. Die Mathematik beschäftigt sich mit den Zahlen und den Größen. Der Endzweck aller ihrer Lehren ist Größen mit einander zu vergleichen. Diese Vergleichung geschieht mittelst der Zahlen.

§. 2. Die Zahl ist ein aus der Mannigfaltigkeit der Dinge hervorgegangener Begriff. Sie besteht aus Einheiten, und wir haben sie, so wie die Einheit selbst, in der Natur überall vor Augen. So sieht man z. B. an einem Orte 6 Menschen, an einem andern 10 Bäume und an einem dritten 3 Häuser stehen u. dgl. m. Die Zahl ist uns daher gegeben.

§. 3. Die Zahlen werden entweder durch die bekannten Ziffern: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, oder durch Buchstaben bezeichnet, wobei man sich der Ziffern bedient, wenn zugleich die Anzahl der Einheiten aus dem Zahlzeichen erkennbar sein soll, hingegen der Buchstaben, wenn man ein Zahlzeichen haben will, welches jede Zahl vorstellen kann, gleichviel aus wie vielen Einheiten dieselbe besteht. Gebraucht man daher den Buchstaben a als Zahlzeichen, so kann man sich darunter jede Zahl vorstellen. Aus diesem Grunde wählt man nun auch die Buchstaben, um die allgemein gültigen Gesetze der Zahlenlehre symbolisch auszudrücken. Die Ziffern nennt man auch bestimmte und die Buchstaben allgemeine Zahlenausdrücke. *)

*) Die Ziffer ist sonach bloß ein Zeichen für die Zahl, — nicht aber die Zahl selbst, — welches Zeichen auch anders hätte gewählt werden können. So z. B. hatten die Römer andere Ziffern, nämlich: I, II. III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X u. s. w. (römische Ziffern genannt), aber nicht andere Zahlen als wir.

§. 4. Man unterſcheidet:

a) Benannte und unbenannte (abſtracte) Zahlen.

Eine Zahl heißt benannt, wenn ihr die Benennung der zu Grunde liegenden Einheit beigefügt iſt; z. B. 10 Thaler, 100 Pfund, 3 Fuß u. ſ. w. Iſt dagegen der Zahl keine Benennung beigefügt, z. B. 10, 100, 3 u. ſ. w., ſo heißt ſie unbenannt oder auch abſtract, weil man von dem, was die Einheit vorſtellen könnte, abſtrahirt hat.

b) Abſolute Zahlen und Rechnungsformen.

Jede Zahl, wie ſie uns unmittelbar in der Mannigfaltigkeit der Dinge gegeben iſt, ſei ſie benannt oder unbenannt, wird eine abſolute, d. h. wirkliche Zahl, genannt; z. B. 3 Menſchen, 5 Thaler, 6 Ellen, oder 3, 5, 6, u. ſ. w. Beim Rechnen erſcheinen aber außerdem die Formen $+a$, $-a$, 0, $+\frac{a}{b}$, $-\frac{a}{b}$, (geleſen plus a, minus a, Null, plus a btel, minus a btel), welche keine wirklichen Dinge vorſtellen können, denn in der Natur giebt es z. B. keine Minus-Thaler, Null-Bäume, Plus-Pferde, a btel Menſchen u. dgl. mehr. Dieſe Zahlformen treten jedoch beim Rechnen mit abſoluten Zahlen hervor, und ſie heißen deshalb Rechnungsformen.

§. 5. Größe (Quantum oder Quantität).

Unter Größe verſteht man alles völlig begrenzte Stetige *), was entweder als benannte Zahl erſcheint, oder als benannte Zahl ausgedrückt werden kann. Hiernach iſt z. B. die Ewigkeit, oder eine unendlich lange Linie, keine Größe, weil ſie weder als benannte Zahl erſcheint, noch als ſolche ausgedrückt werden kann.

Iſt die Größe noch nicht als benannte Zahl ausgedrückt, ſo heißt ſie ein Quantum (continuirliche Größe); z. B. eine Linie, ein Haufen Getreide u. ſ. w.; erſcheint dagegen die Größe als benannte Zahl, ſo wird ſie Quantität (discrete Größe) genannt; z. B. 5 Fuß, 10 Scheffel, 4 Thaler u. dgl. m.

*) Das Stetige iſt alles beliebig Begrenzbare, als: Zeit, Kraft und Raum.

Die Quanta nennt man auch Größen im weitern, und die Quantitäten Größen im engern Sinne.

Noch unterscheidet man gleichartige (homogene) und ungleichartige (heterogene) Größen. Erstere lassen sich durch eine gemeinschaftliche Einheit messen, letztere aber nicht. Hiernach sind z. B. 2 Thaler und 3 Pfund ungleichartige Größen, nicht aber 2 Pfund und 3 Loth, indem letztere Größen durch die gemeinschaftliche Einheit „ein Loth" gemessen werden können.

Gleichartige Größen erscheinen ferner als gleichnamig oder ungleichnamig. Ungleichnamige Größen sind z. B. 3 Thaler und 10 Silbergroschen, wofür man aber auch 3 und $\frac{1}{3}$ Thaler schreiben kann. In diesem Falle hat man durch Reduction die Silbergroschen in Theilen des Thalers ausgedrückt, und mithin die ungleichnamigen Größen gleichnamig gemacht. Dergleichen Reductionen führen stets auf die gebrochene, benannte Zahl.

§. 6. Maß, Gemäß.

Jedes Quantum läßt sich durch wirkliches Messen in eine benannte Zahl, z. B. ein Haufen Getreide, in 10 Scheffel, umformen. Die Einheit dieser benannten Zahl — ein Scheffel — wird das Gemäß, und die unbenannte Zahl 10, das Maß der Größe genannt. *) Die unbenannte Zahl ist daher das Kennzeichen der Größe, nicht aber die Größe selbst.

§. 7. Die Zahlenlehre beschäftigt sich zunächst mit den sieben Zahlenverbindungen — auch Rechnungsarten oder Operationen genannt. — Die Verbindung zweier oder mehrerer Zahlen zu einer neuen Zahl ist eine Thätigkeit des Verstandes, und wir versinnlichen uns den Gedanken der Verbindung durch willkührlich gewählte, äußerliche Zeichen, vermöge welcher wir das Gedachte auf die kürzeste Weise niederzuschreiben im Stande sind.

Das Wesen dieser Operationen, von denen hier nur die vier ersten, als Elementar-Operationen, speciell in Betracht kommen, wollen wir im Folgenden näher bezeichnen:

*) Im gewöhnlichen Leben verwechselt man Gemäß mit Maß, und nennt fälschlich die Einheit, womit gemessen wird, das Maß der Größe.

1) Wir können uns zwei Zahlen a und b zu einer dritten vereinigt denken, indem wir die Einheiten von b zu den Einheiten von a hinzuzählen. Diese Geistesthätigkeit (auch Operation, Rechnungsart genannt) heißt die Addition, und ihr Zeichen ist + (gelesen plus), so daß man den Gedanken des Addirens in der Verbindung zweier oder mehrerer Zahlen durch das Pluszeichen, also in der Bezeichnung a + b (gelesen a plus b) ausgedrückt oder angezeigt sieht. Sind mehr als zwei Zahlen, z. B. a, b, c, u. s. w., zu addiren, so entspricht dieser Forderung das Zeichen a + b + c, und man hat alsdann eine Zahl im Geiste entstehen lassen, welche so viele Einheiten enthält, als a, b und c zusammengenommen. Jede äußerliche Verbindung zweier oder mehrerer Zahlen durch das Pluszeichen, z. B. a + b, oder a + b + c, heißt eine Summe, und die durch das + Zeichen verbundenen Zahlen a und b u. s. w. werden die Summanden der Summe, so wie die Zahl, welche aus der Summe (a + b) hervorgeht, der Summenwerth genannt. Setzt man also a + b gleich c, oder 5 + 3 gleich 8, so sind die durch das Pluszeichen entstandenen Verbindungen die Summen und die Zahlen c und 8 die Summenwerthe.*) Diesen Unterschied mag der Anfänger ganz besonders festhalten.

2) Denkt man sich von einer durch Addition entstandenen Zahl einen der Summanden wieder weggenommen, so hat man den Gegensatz der Addition in Anwendung gebracht. Dieser Gegensatz wird die Subtraction genannt, und ihr Zeichen ist ein liegender Strich — (gelesen minus), so daß man den Gedanken des Subtrahirens in der allgemeinen Form c — b, oder, auf einen speciellen Fall bezogen, in der Form 9 — 1 gleich 8, angezeigt sieht. Die Form c — b wird

*) Man hat z. B. 5 + 4 = 9, 11 — 2 = 9, 3 . 3 = 9, 18 : 2 = 9, so daß also, nach der älteren Auffassungsweise, die Zahl 9 eine Summe, eine Differenz, ein Product und einen Quotienten vorstellen kann. Nennt man aber die Verbindung 5 + 4 eine Summe, so wie 11 — 2 eine Differenz, 3 . 3 ein Product und 18 : 2 einen Quotient, so hat man diese Begriffe bestimmter bezeichnet und dadurch jeder Mehrdeutigkeit vorgebeugt.

eine Differenz genannt, und die Zahl, die man sich darunter zu denken hat, entsteht, wenn man die Einheiten, welche b enthält, von den Einheiten der größeren Zahl c abzieht. Die Zahl, welche alsdann übrig bleibt, heißt der Differenzwerth. Die Zahl c in der Differenz $c - b$ wird nächstdem der Minuend, und die Zahl b der Subtrahend genannt.

3) Die Addition enthält den besondern Fall, in welchem alle Summanden der Summe einander gleich sind, z. B. $a + a + a + \ldots\ldots$ bmal als Summand. Eine solche Summe schreibt man kürzer $a.b$ oder $a \times b$ und nennt dieses Zeichen ein Product, während die darunter zu verstehende Zahl — der Productenwerth — gefunden wird, wenn man a so oft zu sich selbst addirt, als b Einheiten enthält, z. B. $3 + 3 + 3 + 3$ wird kürzer geschrieben 3.4, und bedeutet die Zahl, die entsteht, wenn man 3 viermal zu sich selbst addirt; dies giebt 12. Die geistige Thätigkeit, vermöge welcher wir aus a und b, durch wiederholte Addition, eine neue Zahl entstehen lassen, wird die Multiplication genannt. Diese Operation ist daher als ein specieller Fall der Addition zu betrachten.

4) Denkt man sich aus dem Product $a.b$ die Zahl c entstanden, also $a.b$ gleich c, so kann man umgekehrt wieder die Zahl a, bmal, und die Zahl b, amal von c subtrahiren. Dies auf das specielle Beispiel 3.4 gleich 12 angewendet, giebt die Zahl 3, wenn 4 wiederholt von 12 subtrahirt, und die Zahl 4, wenn 3 wiederholt von 12 subtrahirt wird. Diese geistige Thätigkeit des wiederholten Wegdenkens einer Zahl von einer andern größeren bildet den Gegensatz der Multiplication, und wird die Division genannt. Das Zeichen der Division ist ein liegender Strich oder zwei Punkte zwischen den zu dividirenden Zahlen, so daß man den Gedanken des Dividirens in der allgemeinen Form $\frac{c}{b}$ oder $c : b$ (gelesen: c dividirt durch b) ausgedrückt oder angezeigt sieht. Die Form $\frac{c}{b}$ wird ein Quotient und die Zahl, die man sich da-

unter zu denken hat, der Quotientenwerth genannt. Setzt man also $\frac{c}{b}$ gleich a, so ist a der Quotientenwerth, und die Form $\frac{c}{b}$ der zugehörige Quotient. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die Division als ein specieller Fall der Subtraction und als Gegensatz der Multiplication zu betrachten ist.

5) Außer den genannten 4 Elementar-Rechnungsarten giebt es noch drei andere Zahlenverbindungen, nämlich: die Potenzirung, Radicirung und Logarithmirung, welche aber in diesen Anfangsgründen nicht besonders abgehandelt werden sollen.

§. 8. Da die Zahlen durch Zahlzeichen ausgedrückt werden, so kann man auch jedes Zahlzeichen kurzweg einen Ausdruck nennen; so z. B. sind a, 4, $a-b$, $\frac{a}{b}$, $\frac{a-b}{c}$, $\frac{3}{5}$, $10+5$ u. s. w. Ausdrücke. Treten zusammengesetzte Ausdrücke mit andern Ausdrücken in Verbindung, so schließt man dieselben, um anzuzeigen, daß sie nur eine Zahl bezeichnen sollen, in Klammern ein, z. B. $(a-b)+c$, $a-(b+c-g)$, $a.(a+b)$, $(4+3).(4+6-2)$ u. s. w.

§. 9. Man sagt: zwei Ausdrücke a und b sind einander gleich, wenn sie nur eine und dieselbe Zahl bezeichnen. Verbindet man diese Ausdrücke durch das Zeichen $=$ (Gleichheitszeichen), also $a=b$, so heißt eine solche Zahlenverbindung eine Gleichung. Unter einer Gleichung versteht man daher die Verbindung zweier, eine und dieselbe Zahl bezeichnender Ausdrücke, vermittelst des Gleichheitszeichens. Hiernach sind $4=4$, $2.3=6$, $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ u. s. w. Gleichungen.

Aus dem Begriffe der Gleichung folgt, daß dieselbe nur alsdann richtig bleiben kann, wenn man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gleiche Rechnungen vornimmt. Vermehrt oder vermindert man daher in der Gleichung $a=b$ die Zahl a um die Zahl m, so muß auch, wenn der Begriff der Gleichung nicht aufgehoben werden soll, die Zahl b um gleichviel, nämlich um m, vermehrt oder vermindert werden.

Man erhält daher wieder eine richtige Gleichung, wenn man ſchreibt: $a+m=b+m$ oder $a-m=b-m$, oder bei beſtimmten Zahlen: $4=4$ giebt $4+3=4+3$ u. ſ. w.

Aus dem Begriffe der Gleichung folgt ferner das allgemeine Grundgeſetz:

„Sind zwei Ausdrücke einem dritten gleich, ſo ſind ſie unter ſich gleich.“

Beweis: Iſt $a=b$ und $b=c$, ſo muß auch ſein:

$$a=b=c;$$

denn b bezeichnet dieſelbe Zahl als a und c.

§. 10. Alle Gleichungen, deren Richtigkeit ſich ſogleich, oder vermittelſt einiger Umformungen, erkennen läßt, z. B. $a=a$, $3+5=8$, heißen identiſche. Der Theil der Zahlenlehre, welcher ſich nur mit dieſen Gleichungen befaßt, wird die Arithmetik genannt. Außerdem giebt es noch Gleichungen, die nicht unmittelbar als richtig gegeben ſind, wie z. B. $3:4=5:x$. Solche Gleichungen heißen Beſtimmungsgleichungen, inſofern für den Ausdruck x eine beſtimmte Zahl gefunden werden muß, damit die Gleichung richtig wird. In dem ſpeciellen Falle, daß die durch das Gleichheitszeichen verbundenen Ausdrücke Quotienten ſind, nennt man dieſe Beſtimmungsgleichungen auch Proportionen. Die Lehre von den Beſtimmungsgleichungen, in ihrer vollſtändigſten Ausdehnung, wird die Algebra genannt.

§. 11. Man nennt zwei Ausdrücke a und b ungleich, wenn die Zahlen, welche durch a und b bezeichnet werden, ungleich ſind, und ſagt, a ſei größer als b, wenn a in der Zahlenreihe höher ſteht als b.

Dieſe Beſchaffenheit der Zahlen a und b drückt man durch das Zeichen $a>b$ aus, und umgekehrt, wenn angezeigt werden ſoll, daß b kleiner als a iſt, durch das Zeichen $b<a$. Jede dieſer Bezeichnungen heißt eine Ungleichung.

Aus dem Begriffe der Ungleichung folgt das Grundgeſetz: „Iſt eine Zahl a größer als eine andere b, und dieſe wieder größer als eine dritte c, ſo iſt auch die erſtere größer als die dritte.“ Dies in der kürzeren arithmetiſchen Zeichenſprache ausgedrückt, giebt:

$a > b$ und $b > c$ folglich $a > c$.

Beweis: Nach der Voraussetzung steht a in der Zahlenreihe höher als b, und b wiederum höher als c; mithin steht auch a in der Zahlenreihe höher als c, und deshalb ist: $a > c$, was zu beweisen war.

§. 12. Rechnen heißt gegebene Ziffern- oder Buchstaben-Ausdrücke, mittelst der Gesetze der Zahlenverbindungen, umformen, wobei man hauptsächlich den Zweck vor Augen hat, für zusammengesetztere Ausdrücke einfachere zu erhalten, z. B. $3 + 6 = 9$, $3 . 6 = 18$ u. s. w. Man bildet daher beim Rechnen, durch die jedesmal entsprechenden Umformungen, identische Gleichungen, und zwar so lange, bis man rechts vom Gleichheitszeichen den einfachsten Ausdruck hat. Die erste und hauptsächlichste Bedingung für alles Rechnen ist die Bekanntschaft mit den Operations-Gesetzen.

§. 13. Die Bezeichnung sämmtlicher Zahlen vermittelst der Ziffern 1 bis 9 und der Null *).

Man hat, um nicht für jede bestimmte Zahl der Zahlenreihe ein besonderes Zeichen nöthig zu haben, wodurch das Schreiben und Lesen derselben überaus erschwert sein würde, aus den Ziffern von 1 bis 9 und der Null neue Zahlzeichen für alle übrigen Zahlen auf eine sehr zweckentsprechende Art gebildet. Hierbei verfuhr man, wie folgt:

Man bezeichnete die Zahl zehn durch das Zeichen 10, und nannte diese Zahl eine Einheit der zweiten Ordnung, oder einen Zehner. Aus zehn Einheiten der 2ten Ordnung setzte man ferner eine Einheit der 3ten Ordnung zusammen, nannte sie einen Hunderter, und gab ihr das Zeichen $100 = 10 . 10$. Hierauf vereinigte man wieder 10 Einheiten der dritten Ordnung zu einer Einheit der 4ten Ordnung, nannte sie einen

*) Das Zeichen 0 (gelesen „Null") ist die kürzere Schreibart für alle Differenzen, deren Minuend und Subtrahend einander gleich sind; man schreibt also für $a - a$, $2 - 2$, $3 - 3$, $p - p$, u. s. w. kürzer 0. Auch kann man sagen, die Null sei ein Zeichen für das Nichtvorhandensein der Zahl, weil a von a subtrahirt keine Zahl übrig läßt. Die erstere Auffassungsweise ist jedoch die bessere, denn man kann alsdann mit der Null eben so rechnen, wie mit jeder andern Differenz, sobald man dafür $p - p$ setzt.

Tausender und schrieb dafür 1000=10.100 (gelesen 10 Hunderter oder 10 mal hundert). So fortfahrend bildete man ferner die Einheiten: Zehntausend, bezeichnet durch 10000=10.1000; Hunderttausend, bezeichnet durch 100000=100.1000; Million, bezeichnet durch 1000000=10.100000=100.10000; 1 Billion = Million mal Million; 1 Trillion = Million mal Billion. Außerdem kann man noch die Zahlenbegriffe 1 Quadrillion (Million mal Trillion); Quinquillion (Million mal Quadrillion) u. s. w. bilden, die aber im gewöhnlichen Leben nicht mehr in Anwendung kommen, weil eine so große Menge gleichartiger Dinge nirgends vorhanden ist.

§. 14. Drückt man die Zahlenreihe auf die so eben bemerkte Art aus, so erhält man ein Zahlensystem, welches das decadische genannt wird. Man versteht daher unter dem decadischen Zahlensystem die Darstellung sämmtlicher Zahlen, mittelst der Ziffern 1 bis 9 und der Null, wobei man immer 10 Einheiten einer niederen Ordnung zu einer Einheit der nächst höheren zusammengefaßt hat. Eine jede Zahl bildet mithin im decadischen Zahlensystem eine Summe (§. 7. 1.), bestehend aus einigen Einern, Zehnern, Hundertern u. s. w., in welcher jedoch auch einer oder mehrere der genannten Summanden fehlen können. Aus dieser Auffassungsweise ergeben sich folgende Erklärungen:

1) Man versteht unter einer numerischen Zahl eine nach dem decadischen Zahlensystem geordnete Zahl. Sie besteht also aus Einern, Zehnern, Hundertern, Tausendern u. s. w.

2) Eine Zahl zählen, heißt nachweisen, aus wie vielen Einern, Zehnern, Hundertern u. s. w. sie besteht.

3) Numeriren heißt, gegebene numerische Zahlen in Worten, oder durch Ziffern, ausdrücken.

§. 15. Findet sich beim Zählen einer Zahl, daß sie irgend eine Ordnungs-Einheit der decadischen Zahlenreihe nicht enthält, so können wir dieselbe dennoch als eine vollständig geordnete, numerische Zahl (d. h. als eine Summe mehrerer Einer, Zehner, Hunderter ꝛc.) darstellen, indem wir z. B. die fehlenden Hunderter durch 0.100 bezeichnen, weil jede Zahl

mit 0 multiplicirt (was jedoch erſt ſpäter bewieſen werden kann, §. 34. 18), wieder 0 giebt. Bei dieſer Darſtellung fällt alsdann keine Einheit, irgend einer Ordnung, aus der Zahlenreihe heraus, und man erhält z. B. die Zahl, welche aus zwei Tauſendern, drei Zehnern und zwei Einern beſteht, durch folgende Summe (numeriſche Zahl) ausgedrückt:

$$2 . 1000 + 0 . 100 + 3 . 10 + 2.$$

Dieſe Summe wird nun aber weit kürzer geſchrieben, indem man die Benennungen: Tauſender, Hunderter und Zehner gänzlich wegläßt, und alsdann den Werth eines jeden Summanden bloß an der Stelle erkennt, die er, von der Rechten zur Linken geleſen, einnimmt. Nächſtdem läßt man aber auch noch ſämmtliche + Zeichen weg, indem man ſich ſolche hinzudenkt, und erhält, dieſen Anordnungen zufolge, die obige Summe in ihrer kürzeſten Schreibart in der Form 2032 ausgedrückt.

Will man nach denſelben Anordnungen die numeriſche Zahl: „zwei Millionen, drei hundert und vier Tauſender und acht Zehner", oder wie man ſprachgebräuchlich ſagt: „zwei Millionen, dreihundert und viertauſend und achtzig" auf die kürzeſte Art durch Ziffern ausdrücken, ſo hat man zunächſt:

$2 . 1000000 + 300 . 1000 + 4 . 1000 + 8 . 10$, wofür man aber auch ſchreiben kann:

$2 . 1000000 + 3 . 100000 + 0 . 10000 + 4 . 1000 + 0 . 100 + 8 . 10 + 0 . 1 = 2304080.$

Ferner giebt die Zahl drei Tauſend vier hundert und zwei und ſiebenzig Millionen, zwei hundert und zwei und zwanzig Tauſend, zwei hundert und zwei und zwanzig Thaler in Ziffern: $(3472 . 1000000 + 222 . 1000 + 222)$ Rthlr. $= (3000 . 1000000 + 400 . 1000000 + 70 . 1000000 + 2 . 1000000 + 200 . 1000 + 20 . 1000 + 2 . 1000 + 2 . 100 + 2 . 10 + 2)$ Rthlr. $= (3 . 1000000000 + 4 . 100000000 + 7 . 10000000 + 2 . 1000000 + 2 . 100000 + 2 . 10000 + 2 . 1000 + 2 . 100 + 2 . 10 + 2)$ Rthlr. =

3472 222 222 Rthlr.

§. 16. Uebungen im Numeriren.

a) Man ſoll folgende, in Worten gegebene, numeriſche Zahlen nach §. 15 in Ziffern ausdrücken:

1) vier hundert und acht und dreißig,
2) drei tauſend und eins,
3) ſiebenzig tauſend und zwei und zwanzig,
4) ein und ſiebenzig tauſend, zwei hundert,

5) dreißig Millionen, vier hundert und neun,
6) hunderttausend Millionen, drei hundert und vier,
7) eine Billion, eine Million, ein hundert und sechszehn tausend und zehn,
8) drei hundert und drei Millionen, achtzig tausend, zwei hundert und eins.

b) Man soll folgende, in Ziffern geschriebene, numerische Zahlen in Worten ausdrücken (lesen):

1) 30025.
2) 0034. *)
3) 901300.
4) 9000000.
5) 90735678.
6) 21100001.
7) 20011000.
8) 320000019.
9) 5397800002.
10) 8700000026.
11) 76051000998.
12) 100000136040.
13) 6001304768021.
14) 15300043589910.
15) 990000088882008.
16) 10000023450613145.
17) 302216.710011.998700.
18) 9 000000.002000.118829.
19) 24.350600.100001.222903.

Die letzte Zahl enthält also: 24 Trillionen, 350 tausend 600 Billionen, 100 tausend und 1 Million, 222 tausend, 9 hundert und 3.

Anmerkung: Zur bessern Uebersicht ist es bei großen Zahlen anzurathen, dieselben, ehe man sie liest, von der Rechten zur Linken durch Punkte in Klassen von je drei oder sechs Ziffern abzutheilen. Man übersieht solche alsdann mit größerer Leichtigkeit, wie aus No. 19 hervorgeht.

§. 17. Fragen und Antworten.

1) Womit beschäftigt sich die Mathematik? §. 1.
2) Was ist die Zahl, und woraus besteht sie? §. 2.
3) Wozu dient die Zahl in der Mathematik? §. 1.
4) Wodurch werden die Zahlen bezeichnet? §. 3.
5) In welchen Fällen bezeichnet man die Zahlen durch Ziffern, und in welchen durch Buchstaben? §. 3.
6) Wodurch unterscheidet sich die Ziffer von der Zahl? §. 3.
7) Wie theilt man die Zahlen ein? §. 4.
8) Wenn nennt man eine Zahl benannt, und wenn unbenannt? §. 4.
9) Was versteht man unter einer absoluten Zahl? §. 4.
Antw.: Eine Zahl, die in der Natur wirklich vorhanden ist.

*) Die Zahl 0034 müßte eigentlich gelesen werden: 0 Tausender, 0 Hunderter, drei Zehner und vier. Da diese Zahl aber keine Tausender und Hunderter enthält, so hat man auch nur die Zahl: vier und dreißig. Man kann deßhalb jeder Zahl zur Linken Nullen anhängen, ohne daß dadurch ihr Werth geändert wird.

10) Welche Zahlenformen bilden den Gegensatz zur wirklichen Zahl? §. 4.
Antw.: Die Rechnungsformen: $+a$, $-a$, o, $+\frac{a}{b}$, und $-\frac{a}{b}$.

11) Was versteht man unter einer Größe? §. 5.

12) Wie nennt man die Größe, so lange man dieselbe noch nicht als benannte Zahl ausgedrückt hat, und wie, wenn dies der Fall ist? §. 5.

13) Nur in welcher Beziehung werden die Größen in der Mathematik betrachtet? §. 6. Antw.: Nur in Bezug ihrer Maße.

14) Womit beschäftigt sich zunächst die Zahlenlehre? §. 7.

15) Was versteht man unter einem Ausdruck? §. 8.

16) Was versteht man unter einer Gleichung? §. 9.

17) Wenn man die Addition, Subtraction, Multiplication oder Division bei einer Gleichung in Anwendung bringen will, wie muß man alsdann verfahren, wenn dieselbe richtig bleiben soll? §. 9.

18) Wenn sagt man, eine Zahl sei größer als eine andere? §. 11.

19) Was heißt rechnen? §. 12.

20) Was versteht man unter einer Summe? Antw.: Einen Ausdruck von der Form $a + b$. §. 7.

21) Was bezeichnet ein solcher Ausdruck? Antw.: Die Zahl, welche entsteht, wenn man die Einheiten von b zu den Einheiten von a hinzuzählt.

22) Wie wird die so entstandene Zahl genannt? Antw.: Der Summenwerth.

23) Durch welche Anordnung hat man das Lesen und Schreiben der Zahlen überaus erleichtert? §. 13.

24) Was versteht man unter dem decadischen Zahlensysteme? §. 14.

25) Was versteht man unter einer numerischen Zahl? §. 14.

26) Was heißt Zählen? §. 14.

27) Was heißt Numeriren? §. 14.

28) Wenn man eine in Worten gegebene, numerische Zahl mit Ziffern schreiben soll, wie hilft man sich, wenn dieselbe irgend eine Ordnungseinheit nicht enthält? §. 15.

29) Woraus besteht jede numerische Zahl? Antw.: Aus einer Summe von Einern, Zehnern, Hundertern, Tausendern, Zehntausendern u. s. w.

30) Wie schreibt man aber diese Summe kürzer? §. 15.

Anmerkung. Diese Fragen sind von den Schülern zunächst schriftlich und sodann mündlich zu beantworten.

Erster Theil der Zahlenlehre.

Die Lehre von den unbenannten Zahlen.

I. Abschnitt.

Die Lehre von den vier Elementar-Operationen mit ganzen absoluten Zahlen.

Erstes Kapitel.

Die Addition und Subtraction.

I. Die Addition.

§. 18. Addiren heißt, aus zwei oder mehreren Zahlen eine neue Zahl bilden, welche so viele Einheiten enthält, als die gegebenen Zahlen zusammengenommen. Im §. 7 haben wir bereits bemerkt, daß die Addition eine Thätigkeit unseres Verstandes ist, die wir äußerlich durch das Zeichen $a+b$, welches Zeichen eine Summe genannt wird, ausdrücken.

Sollen mehrere Zahlen, oder auch mehrere Summen, z. B.: a, c, b, oder $(a+b+c)$ und $(d+e)$ zu einander addirt werden, so kann dies nur dergestalt geschehen, daß wir im erstern Falle zu der Zahl a die Einheiten von b und zu dem, was herauskommt, die Einheiten von c hinzuzählen, und im letztern, daß wir zu der Zahl, welche die Summe $(a+b+c)$ vorstellt, zuerst die Zahl d und sodann auch die Zahl e hinzuaddiren.

Beim Addiren muß es ganz gleichgültig sein, in welcher Ordnung die Summanden nach und nach addirt werden, denn man erhält z. B. eine und dieselbe Zahl, wenn man die Zahlen 5 und 3 in der Ordnung $5+3$, oder in der Ordnung

3 + 5 addirt; in beiden Fällen kommt als neue Zahl der Summenwerth 8 zum Vorſchein. Hieraus ergeben ſich folgende Grundgeſetze*) der Addition:

I. $a + b = b + a$.

In Worten: „Man kann die Summanden einer Summe beliebig verſetzen."

II. $(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c)$.

In Worten: „Soll man eine Zahl zu einer Summe addiren, ſo kann man dieſelbe auch zu einem der Summanden addiren"; und von der Rechten zur Linken geleſen: „Eine Summe wird zu einer Zahl addirt, wenn man die Summanden derſelben in beliebiger Ordnung nach und nach zu dieſer Zahl addirt".

III. $a + m = b + m$, wenn $a = b$ und $m = m$.

In Worten: „Gleiches zu Gleichem addirt, giebt wiederum Gleiches", oder: „eine Gleichung bleibt richtig, wenn man zu beiden Seiten eine und dieſelbe Zahl addirt."

§. 19. Aufgabe. Man ſoll die Summe zweier einziffrigen Zahlen, z. B.: 3 + 7, in eine numeriſche Zahl umformen. Kürzer kann dieſe Aufgabe auch geſtellt werden: man ſoll die Zahlen 3 und 7 addiren, d. h.: man ſoll eine neue Zahl finden, welche der Summe 3 + 7 entſpricht.

Auflöſung: $3+7=7+3=7+1+1+1=8+1+1=9+1=10$.

Für das ſchnelle Rechnen iſt es nöthig, daß man die Summenwerthe von je zwei einziffrigen Zahlen ſämmtlich auswendig wiſſe. Dieſe Summenwerthe findet man für die erſten zwölf Zahlen in nachſtehender Tabelle, welche das Einsundeins genannt wird.

---

*) Unter Grundgeſetz verſtehen wir eine Rechnungsregel, die unmittelbar aus der Erklärung einer Rechnungsart abgeleitet iſt. Dieſe, ſo wie alle übrigen, abgeleiteten Geſetze, müſſen aber durch allgemeine Zahlzeichen (Buchſtaben) ausgedrückt werden, damit ſie auch für ſämmtliche Zahlen gelten.

1+ 1= 2	2+ 1= 3	3+ 1= 4	4+ 1= 5	5+ 1= 6
1+ 2= 3	2+ 2= 4	3+ 2= 5	4+ 2= 6	5+ 2= 7
1+ 3= 4	2+ 3= 5	3+ 3= 6	4+ 3= 7	5+ 3= 8
1+ 4= 5	2+ 4= 6	3+ 4= 7	4+ 4= 8	5+ 4= 9
1+ 5= 6	2+ 5= 7	3+ 5= 8	4+ 5= 9	5+ 5=10
1+ 6= 7	2+ 6= 8	3+ 6= 9	4+ 6=10	5+ 6=11
1+ 7= 8	2+ 7= 9	3+ 7=10	4+ 7=11	5+ 7=12
1+ 8= 9	2+ 8=10	3+ 8=11	4+ 8=12	5+ 8=13
1+ 9=10	2+ 9=11	3+ 9=12	4+ 9=13	5+ 9=14
1+10=11	2+10=12	3+10=13	4+10=14	5+10=15
1+11=12	2+11=13	3+11=14	4+11=15	5+11=16
1+12=13	2+12=14	3+12=15	4+12=16	5+12=17

6+ 1= 7	7+ 1= 8	8+ 1= 9	9+ 1=10	10+ 1=11
6+ 2= 8	7+ 2= 9	8+ 2=10	9+ 2=11	10+ 2=12
6+ 3= 9	7+ 3=10	8+ 3=11	9+ 3=12	10+ 3=13
6+ 4=10	7+ 4=11	8+ 4=12	9+ 4=13	10+ 4=14
6+ 5=11	7+ 5=12	8+ 5=13	9+ 5=14	10+ 5=15
6+ 6=12	7+ 6=13	8+ 6=14	9+ 6=15	10+ 6=16
6+ 7=13	7+ 7=14	8+ 7=15	9+ 7=16	10+ 7=17
6+ 8=14	7+ 8=15	8+ 8=16	9+ 8=17	10+ 8=18
6+ 9=15	7+ 9=16	8+ 9=17	9+ 9=18	10+ 9=19
6+10=16	7+10=17	8+10=18	9+10=19	10+10=20
6+11=17	7+11=18	8+11=19	9+11=20	10+11=21
6+12=18	7+12=19	8+12=20	9+12=21	10+12=22

§. 20. **Aufgabe.** Man ſoll zwei oder mehrere numeriſche Zahlen, z. B. 66 und 450, addiren.

Auflöſung: Man addire die gleichnamigen Ordnungs-Einheiten der einen Zahl zu den gleichnamigen Ordnungs-Einheiten der andern Zahl, und bilde aus dieſer Summe eine numeriſche Zahl.

$$450 = 4.100 + 5.10 + 0.1$$
$$66 = 6.10 + 6$$
$$450+66 = 4.100 + 11.10 + 6$$
$$= 4.100 + 10.10 + 1.10 + 6$$
$$= 4.100 + 1.100 + 1.10 + 6$$
$$= 5.100 + 1.10 + 6$$
$$= 516.$$

0.1 iſt = 0, und 0 zu 6 addirt, giebt wieder 6.

4hundert, und dazu noch 1hundert addirt, giebt 5hundert.

§. 21. Aus dem vorstehenden Verfahren hat man eine kürzere Ausführung der Addition abgeleitet. Man schreibt nämlich die zu addirenden Summanden so unter einander, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter und so fort, zu stehen kommen. Hierauf addirt man die Einheiten der ersten Ordnung (die Einer) und zählt die in ihrer Summe enthaltenen Zehner zu den übrigen Zehnern mit hinzu. Auf gleiche Weise verfährt man mit den Zehnern, indem man die in ihrem Summenwerthe enthaltenen Hunderter zu den übrigen Hundertern addirt. Das obige Additions-Beispiel kommt daher im Ansatze, wie folgt, zu stehen:

450
66
516.

Bei diesem Verfahren sagt man also: 6 Einer + 0 giebt 6 Einer, und schreibt diese Zahl in die Stelle der Einer. Alsdann addirt man 6 Zehner und 5 Zehner, was 11 Zehner giebt, und schreibt von diesen nur 1 Zehner in die Stelle der Zehner, da die übrigen 10 Zehner 1 Hunderter geben, und mit zu den Hundertern zu zählen sind. Zuletzt geben 1 Hunderter und 4 Hunderter zusammen 5 Hunderter.

Andere Beispiele:

1) 34500
207
9408
44115.

2) 63507
5001
889
59999
129396.

3) 30087953
453210
99999999
888777
666555
44443333
98756789
275296616.

4) $9 + 6 + 7 + 8 + 5 + 4 + 2 + 1 + 3 = 45$.

5) $25 + 33 + 78 + 96 + 59 + 8 + 10 = 309$.

6) $36 + 510 + 907 + 7 + 88 = 1548$.

7) $5008 + 11165 + 9978 + 432 + 357 + 232 + 677 + 39 = 27888$.

8) $35099 + 277 + 8873002129 + 93751 + 00000712 + 703692 = 8873835660$.

9) $38921930 + 3966876 + 9987654 + 534003 + 7866566634 + 6511 + 19842 + 2375689 = 7922379139$.

10) 5944013 + 21987560034 + 89975600219 + 7603005 + 16151422007 + 683456786 = 128811586064.

Anmerkung: Als Probe für die Richtigkeit der Rechnung wendet man bei der Addition das Grundgesetz a + b = b + a an; man addirt nämlich noch einmal, aber in anderer Ordnung.

II. Die Subtraction.

§. 22. Die Subtraction ist der Gegensatz der Addition und entsteht dadurch, daß man sich von dem Summenwerth c = a + b sowohl die Zahl a als auch die Zahl b wieder wegdenken kann. (§. 7). Die geistige Thätigkeit des Subtrahirens drückt man äußerlich durch ein Zeichen von der Form c — b aus, welches Zeichen eine Differenz genannt wird. Die Zahl c, von welcher abzuziehen ist, heißt der Minuend, und die Zahl b, welche abgezogen werden soll, der Subtrahend.

Subtrahirt man von irgend einer Zahl a eine andere b, und addirt man zu dieser Differenz gleichzeitig wieder die Zahl b, so muß, dem Gegensatze beider Operationen gemäß, die Zahl a unverändert bleiben. Man hat also: (a — b) + b = a, welche Gleichung den Begriff des Subtrahirens allgemeiner giebt, als die Erklärung des § 7. Eine Differenz a — b bezeichnet daher die Zahl, die, zu ihrem Subtrahend addirt, den Minuend wieder zum Vorschein bringt, und Subtrahiren heißt eine Zahl (den Differenzwerth) finden, die, zum Subtrahend addirt, den Minuend giebt. Hiernach sind für die Subtraction und Addition in Verbindung folgende Gesetze zu bemerken:

a) Grundgesetze:

IV. (a — b) + b = a.

In Worten: „Addirt man eine Differenz zu ihrem Subtrahend, so erhält man den Minuend", oder, von der Rechten zur Linken gelesen: „Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man von ihr eine andere Zahl subtrahirt und gleichzeitig wieder addirt".

V. (a + b) — b = a.

In Worten: „Subtrahirt man von einer Summe den einen der Summanden, so bleibt der andere Summand übrig", oder, von der Rechten zur Linken

geleſen: „Eine Zahl bleibt dem Werthe nach unverändert, wenn man zu ihr eine andere Zahl addirt und gleichzeitig wieder ſubtrahirt".

Für die Subtraction insbeſondere gilt:

VI. $a - m = b - m$, wenn $a = b$ und $m = m$.

In Worten: „Gleiches von Gleichem ſubtrahirt, giebt wieder Gleiches", oder: „Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man von beiden Seiten eine und dieſelbe Zahl ſubtrahirt".

b) Abgeleitetes Subtractions-Geſetz:

VII. $a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b$.

In Worten: „Eine Summe wird von einer Zahl ſubtrahirt, indem man jeden Summanden nach und nach in beliebiger Ordnung abzieht", oder, von der Rechten zur Linken geleſen: „Eine Zahl wird von einer Differenz ſubtrahirt, indem man dieſelbe zum Subtrahenden addirt, und dieſe Summe wiederum vom Minuenden ſubtrahirt".

Da die Umformung VII ſich nicht unmittelbar aus der Erklärung des Subtrahirens ergiebt, ſo haben wir deren Richtigkeit darzuthun, d. h. zu beweiſen. In dieſem Falle nehmen wir die gegebene Gleichung vorläufig als richtig an, und unterſuchen demnächſt, ob ſie auch wirklich richtig iſt, d. h. ob ſie, vereinfacht, auf jeder Seite des Gleichheitszeichens eine und dieſelbe Zahl giebt. Zur Vereinfachung einer Gleichung wendet man aber immer die Gegenſätze der in ihr vorkommenden, angezeigten Operationen an. Man wird daher in der Gleichung VII zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens den Subtrahend $(b + c)$ addiren. Nach Grundgeſetz III erhält man alsdann wieder eine richtige Gleichung, welche demnächſt in einfachere und zuletzt in Ausdrücke übergeht, deren Gleichheit in die Augen fällt, nämlich:

$[a - (b + c)] + (b + c) = [(a - b) - c] + b + c$, dies giebt auf der linken Seite nach Grundgeſetz IV:

$a = [(a - b) - c] + c + b$, (nach Grundgeſetz I. kann man die Summanden beliebig verſetzen)

$a = (a - b) + b$, und wiederum nach Grundgeſetz IV:

$a = a$.

Da nun durch das Umformen (Rechnen) wirklich eine und dieſelbe Zahl herauskommt, ſo iſt auch die in VII gegebene Gleichung richtig,

und man kann sie in allen Fällen, wo eine Summe von einer Zahl abgezogen werden soll, als Rechnungsregel (Gesetz, auch Formel genannt) benutzen.

Durch wiederholte Anwendung des Gesetzes VII kann man auch eine Summe beliebig vieler Summanden von der einfachen Zahl, oder auch selbst eine Summe von einer andern Summe subtrahiren. Beispiele:

1) $a-(b+c+g+h)=a-[(b+c)+(g+h)]=$
$[a-(b+c)]-(g+h)=a-b-c-g-h.$
2) $(a+b)-(c+d+g)=(a+b)-[(c+d)+g]=$
$a+b-(c+d)-g=a+b-c-d-g.$
3) $m-n-(a+b+g)=m-n-a-b-g.$
4) $m-n-n=m-(n+n)=m-2n.$ VII. V. d. R. z. L. gelesen.
5) $(m-n)-m=(m-m)-n=0-n=-n.$
6) $2-(3+4)=(2-3)-4=(2-4)-3.$
7) $6-(3+2)=(6-3)-2=(6-2)-3=4-3=1.$
8) $(3-4)-1=(3-1)-4=2-4.$
9) $8-3-2=8-(3+2)=8-5=3.$

§. 23. Aufgabe. Man soll eine einziffrige Zahl von einer größern einziffrigen Zahl subtrahiren, z. B. 4 von 9.

Auflösung: Man suche die Zahl, welche zum Subtrahend addirt werden muß, um den Minuend zu erhalten. Dies giebt: $9-4=5$.

Anmerkung: Die Zahl, die zum Subtrahend addirt werden muß, findet man am schnellsten mittelst des Einsundeins.

§. 24. Aufgabe. Man soll zwei mehrziffrige Zahlen von einander subtrahiren, z. B. 621 von 723.

Auflösung: Man subtrahire, nach Gesetz VII, die Ordnungs-Einheiten des Subtrahendus von den gleichnamigen des Minuendus, und bilde aus diesen Differenzwerthen eine numerische Zahl; z. B.:

1) $723-621=(7.100+2.10+3)-(6.100+2.10+1).$
Minuend $7.100+2.10+3$
Subtrahend $6.100+2.10+1$
Differenzwerth: $1.100+0.10+2=102.$
2) $873-604=(8.100+7.10+3)-(6.100+0.10+4).$
Minuend $8.100+7.10+3=8.100+6.10+13$
Subtrahend $6.100+0.10+4=6.100+0.10+4$
Differenzwerth: $2.100+6.10+9=269.$

In diesem Beispiele konnten 4 Einer von 3 Einern nicht abgezogen werden. Es war daher nöthig, von den 7 Zehnern eine Einheit zu entnehmen und solche als 10 Einer zu den übrigen 3 Einern des Minuendus hinzuzuzählen.

3) $800 - 79 = 8.100 - (7.10 + 9)$.

Min. $8.100 + 0.10 + 0.1 = 7.100 + 10.10 + 0.1 = 7.100 + 9.10 + 10$

Sub. $0.100 + 7.10 + 9 = 0.100 + 7.10 + 9 = 0.100 + 7.10 + 9$

Differenzwerth: $7.100 + 2.10 + 1 = 721$.

4) $6324 - 830 = 5494$.

Minuend $6.1000 + 3.100 + 2.10 + 4$

Subtrahend $8.100 + 3.10 + 0.1$

$5.1000 + 4.100 + 9.10 + 4$*) $= 5494$.

§. 25. Aus dem Vorstehenden hat man für das schnellere Rechnen ein kürzeres Subtractions-Verfahren abgeleitet. Man schreibt nämlich die Zahl des Subtrahendus mit ihren Ordnungseinheiten unter die gleichnamigen des Minuendus und subtrahirt alsdann jede Ordnung des Subtrahendus von der gleichnamigen Ordnung des Minuendus. Findet sich hierbei, daß die Zahl der gleichnamigen Ordnung im Minuendus kleiner ist, als im Subtrahendus, so borgt man im Minuendus eine Einheit der nächst höhern Ordnung, und führt die Subtraction von der Rechten zur Linken alsdann, wie folgt, aus:

$$\begin{array}{r} 800 \\ 79 \\ \hline 721. \end{array}$$

Man sagt also: 9 von 10 bleibt 1, indem man einen Zehner borgt. Da nun aber keine Zehner in der betreffenden Ordnung enthalten sind, so nimmt man 1 Hunderter zu Hülfe, und denkt sich davon 9 Zehner in die Stelle der Zehner und einen Zehner = 10 Einer, in die Stelle der Einer gesetzt. Alsdann subtrahirt man weiter: 7 von 9 bleibt 2 und 0

*) Daß $4 - 0.1 = 4 - 0 = 4$, wird später, §. 30. No. 2, beweisen werden.

von 7 bleibt 7. Auf gleiche Weise verfährt man in allen ähnlichen Fällen.

4)	580006	5)	9007899	6)	100000
	3468		8884300		999
	576538.		123599.		99001.

7) $4007300 - 50890 = 3956410$.
8) $59000100 - 9809 = 58990291$.
9) $60008000 - 90905 = 59917095$.
10) $3458001 - 1000001 = 2458000$.

Anmerkung: Als Probe für die Richtigkeit der Rechnung wendet man bei der Subtraction das Grundgesetz $(a - b) + b = a$ an. Man addirt nämlich den Subtrahend zu dem erhaltenen Differenzwerthe, welche Summe wiederum den Minuend geben muß; z. B. in N. 4: $576538 + 3468 = 580006$.

§. 26. Ueber den Gebrauch der Klammern bei Summen und Differenzen. (Vergleiche §. 8).

Erscheint der Subtrahend als ein zusammengesetzter Ausdruck, so muß derselbe jedesmal in Klammern eingeschlossen werden, denn wollte man z. B. die Klammern in der Differenz $a - (b + c)$ weglassen, woraus $a - b + c$ entstände, so hätte man offenbar von a nur b subtrahirt und dazu wiederum c addirt, während die Bezeichnung mit der Klammer verlangt, daß sowohl b als auch c von a abgezogen werden soll, woraus $a - b - c$ entsteht.

Ist dagegen der Minuend zusammengesetzt, wie z. B. in $(a - b) - c$, so kann die Klammer wegfallen, weil man die Ausdrücke stets von der Linken zur Rechten liest und $(a - b) - c$ dasselbe sagt, als $a - b - c$. Eben so ist es nicht nöthig, sich der Klammern zu bedienen, wenn man zusammengesetzte Ausdrücke addiren soll; denn $a + (b + c - g)$ muß nothwendig dieselbe Zahl geben, als $a + b + c - g$. Klammern sind daher bis jetzt nur bei zusammengesetzten Subtrahenden nothwendig.

III. Die Addition und Subtraction in Verbindung.

§. 27. Wenn Summen und Differenzen mit der einfachen Zahl durch Addition und Subtraction verbunden und demnächst umgeformt werden sollen, so können überhaupt folgende Aufgaben gestellt werden:

* Summe + Zahl; $(a+b)+c=?$
1) Summe — Zahl; $(a+b)-c=?$
2) Differenz + Zahl; $(a-c)+b=?$
* Differenz — Zahl; $(a-b)-c=?$
* Zahl + Summe; $a+(b+c)=?$
* Zahl — Summe; $a-(b+c)=?$
3) Zahl + Differenz; $a+(b-c)=?$
4) Zahl — Differenz; $a-(c-b)=?$

Die Auflöſung der mit einem Sternchen verſehenen Aufgaben iſt bereits in dem Grundgeſetze II, und in dem allgemeinen Subtractionsgeſetze VII. §. 22 enthalten.

Die Beantwortung der Fragen 1 bis 4 ergiebt ſich aus nachſtehender Gleichung:

N. 1. N. 2. N. 3. N. 4.
A. $(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)=a-(c-b)$*).

In Worten: „Eine Zahl wird von einer Summe ſubtrahirt, indem man entweder dieſe Zahl von einem der Summanden, gleichviel von welchem, ſubtrahirt", oder auch: „indem man einen der Summanden von dieſer Zahl ſubtrahirt und dieſe Differenz wiederum von dem andern Summanden ſubtrahirt."

Als beſonders wichtig heben wir aus der obigen Gleichung die Umformung:

$$a+(b-c)=a-(c-b)$$

heraus. Dieſelbe lehrt nämlich, von der Linken zur Rechten geleſen, wie man jede Summe, deren zweiter Summand eine Differenz iſt, ſelbſt in eine Differenz, oder, von der Rechten zur Linken geleſen, wie man jede Differenz, deren Subtrahend ſelbſt eine Differenz iſt, in eine Summe umformen kann.

Man kehrt nämlich im erſtern Falle die Differenz um und ſubtrahirt ſie vom andern Summanden, und im zweiten Falle kehrt man die Differenz um, und addirt ſie zum Minuenden.

---

*) Durch dieſe Gleichung wird die Behauptung ausgeſprochen, daß die Verbindungen 1 bis 4 einander gleich ſind, und folglich für einander geſetzt werden können.

Beweis: Man verfährt ganz so, wie im §. 22 bei der Gleichung VII gelehrt wurde.

Es soll sein: $a+(b-c)=a-(c-b)$.

Man addire zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens $c-b$, so muß die Gleichung richtig bleiben. (§. 18. III).

$[a+(b-c)]+(c-b)=[a-(c-b)]+(c-b)$

$a+(b-c)+c-b=a$; nach Grundgesetz IV §. 22.

$(a+b)-b=a$; nach Grundgesetz V.

$a=a$.

Auf gleiche Weise lassen sich die übrigen Fälle der Gleichung A beweisen, z. B.:

$(a+b)-c=a+(b-c)$; c addirt:

$[(a+b)-c]+c=[a+(b-c)]+c$

$a+b=a+[(b-c)+c]$. Grundgef. II. §. 18.

$a+b=a+b$.

Wenn wir zeither die synthetische Beweisführung anwendeten, bei welcher die zu beweisenden Sätze als Behauptungen hingestellt werden, deren Richtigkeit demnächst darzuthun ist, so wird es dem Schüler wohl nur erwünscht sein, auch den Weg des Selbsterfindens (analytische Methode) kennen zu lernen. Zugleich wird er dadurch die Ueberzeugung gewinnen, daß unsere Formeln aus den Grundgesetzen der Operationen abgeleitet, und nicht, wie der Anfänger leicht zu glauben geneigt ist, dem gewöhnlichen Ziffernrechnen entnommen sind.

Stellen wir uns z. B. die Aufgabe, für $(a-c)+b$ eine Umformung zu erfinden, so drücken wir diese Forderung zunächst durch die Gleichung $(a-c)+b=x$ aus, und denken uns unter x einstweilen den gesuchten umgeformten Ausdruck. Hierauf formen wir die Gleichung mittelst der Grundgesetze der Addition und Subtraction dergestalt um, daß zunächst die linke Seite derselben einfacher wird, und sodann wieder x auf der rechten Seite allein, links aber ein Ausdruck erscheint, welcher von dem gegebenen, der Form nach, verschieden ist. Die nachstehenden Beispiele werden das Gesagte erläutern.

1) Man soll die Summe $(a-c)+b$ in eine Differenz umformen.

Auflösung: Es sei $(a-c)+b=x$; es ergiebt sich eine Vereinfachung des Ausdrucks links, wenn c zu beiden Seiten der Gleichung addirt wird; also:

$a+b=x+c$; subtrahirt man jetzt c, so ist:

$(a+b)-c=(x+c)-c$

$(a+b)-c=x$. Mithin ist nach §. 9. allgem. Grundgef.:

N. 1. N. 2.

$(a+b)-c=(a-c)+b$.

2) Man soll $(a-c)+b$ in eine andere Summe umformen.

Auflösung: $(a-c)+b=x$, c addirt, giebt:

$a+b=x+c$, a subtrahirt, giebt:

$b=x+c-a$, c subtrahirt, giebt:

$b-c=x-a$, a addirt, giebt:

$(b-c)+a=x$. Man hat daher in den Auflösungen 1 und 2 gefunden:

N. 1. N. 2. N. 3.

$(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)$.

3) Man soll $(a-c)+b$ in eine Differenz, deren Subtrahend selbst eine Differenz ist, umformen.

Auflösung: $(a-c)+b=x$, b addirt, giebt:

$a+b=x+c$, b subtrahirt, giebt:

$a=x+(c-b)$, c—b subtrahirt, giebt:

$a-(c-b)=x$, man hat also in 1, 2 und 3 das Gesetz A entwickelt, nämlich:

$(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)=a-(c-b)$.

Auf dieselbe Weise läßt sich nun auch das Gesetz VII. §. 22 analytisch herleiten.

Beispiele:

1) $(2+3)-8=(2-8)+3=2+(3-8)=2-(8-3)=2-5$.
2) $5-(3-6)=5+(6-3)=(5+6)-3=11-3=8$.
3) $9+(5-6)=9-(6-5)=9-1=8$.
4) $m+(n-m)=(m-m)+n=0+n$.
5) $m-(m+n)=(m-m)-n=0-n$.
6) $m-(n-m)=m+(m-n)=(m+m)-n=2m-n$.

§. 28. Verbindet man Summen und Differenzen mit einander, so erhält man folgende, in den Anwendungen häufig vorkommende, Verbindungen:

N. 5: $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$.

In Worten: „Zwei Differenzen werden addirt, wenn man sowohl die Minuenden als auch die Subtrahenden addirt, und die letztere Summe wiederum von der ersteren abzieht.“

N. 6: $(a-b)-(c-d)=(a-c)-(b-d)$.

In Worten: „Zwei Differenzen werden von einander subtrahirt, wenn man sowohl die Minuenden als auch die Subtrahenden von einander subtrahirt, und die letztere Differenz von der ersteren abzieht.“

Die Umformungen rechts des Gleichheitszeichens ergeben sich sogleich, wenn man die gegebenen Summen und Differenzen nach Gleichung A §. 27, und nach Gesetz VII §. 22 umformt.

nach N. 2. nach N. 3. zu 1.

ad 5. Es ist: $(a-b)+(c-d)=[a+(c-d)]-b=[(a+c)-d]-b=$
$(a+c)-(b+d)$ nach N. VII.

nach N. 4 zu 3. nach N. 2. zu 1.

ad 6. Es ist: $(a-b)-(c-d)=(a-b)+(d-c)=[a+(d-c)]-b=$
nach N. 3. zu 2. nach N. 3. zu 4.
$(a-c)+(d-b)=(a-c)-(b-d)$.

§. 29.

N. 7. $a-b=(a+c)-(b+c)=(a-c)-(b-c)$.

In Worten: „Eine Differenz bleibt dem Werthe nach unverändert, wenn man sowohl zu ihrem Minuend, als auch zu ihrem Subtrahend eine und dieselbe Zahl addirt, oder davon subtrahirt."

Beweis: $a-b=(a+c)-(b+c)=(a-c)-(b-c)$.
nach VII. §. 22. nach N. 4 zu 3. §. 27.
$a-b=[(a+c)-c]-b=(a-c)+(c-b)$
$a-b=a-b=[(a-c)+c]-b$ nach N. 3 zu 1.
$a-b=a-b=a-b$; man erhält folglich überall eine und dieselbe Zahl, und die Gleichung N. 7 ist deshalb richtig.

§. 30. Einige Anwendungen der in den vorigen §§. hingestellten Gesetze.

1) Was giebt $a+0$?

Auflösung: Da wir wissen, daß 0 ein kürzeres Zeichen für eine Differenz von der Form $p-p$ ist, §. 13*, so setzen wir $a+0=a+(p-p)$. Nun aber ist:
nach N. 3 zu N. 1 Gleichung A. §. 27
$a+(p-p)=(a+p)-p=a$. V. §. 22.

Es giebt also 0, zu jeder Zahl addirt, dieselbe Zahl wieder.

2) Was giebt $a-0$?
(N. 4. zu N. 1.)

Es ist $a-0=a-(p-p)=(a+p)-p=a$. V. §. 22.

Es giebt also 0, von irgend einer Zahl subtrahirt, dieselbe Zahl wieder.

3) Wir haben in §. 7 gesehen, daß die Multiplication als ein specieller Fall der Addition, und die Division als ein specieller Fall der Subtraction zu betrachten ist. Uebertragen wir daher die Gleichungen der §§. 22 bis 30 auf die Multiplication und Division, indem wir

anſtatt des Pluszeichens das Multiplicationszeichen, und anſtatt des Minuszeichens das Diviſionszeichen ſetzen; ſo erhalten wir alle Umformungen, welche aus der Verbindung der Multiplication und Diviſion hervorgehen, und die demnächſt wieder ſämmtliche Fälle der Bruchrechnung, (da ein Bruch der Form nach nichts weiter als ein Quotient iſt), enthalten. So z. B. giebt die Gleichung VII §. 22, von der Rechten zur Linken geleſen, den Fall:

$$\frac{a}{c} : b = \frac{a:b}{c} = \frac{a}{b.c}$$ d. h.: „Ein Bruch wird durch eine Zahl dividirt, wenn man entweder den Zähler durch dieſelbe dividirt, oder den Nenner mit derſelben multiplicirt.“

N. 5. §. 28: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ae}{bd}$ d. h.: „Zwei Brüche werden mit einander multiplicirt, wenn man ſowohl die Zähler, als auch die Nenner mit einander multiplicirt.“

N. 7. §. 29: $\frac{a}{b} = \frac{a.c}{b.c} = \frac{a:c}{b:c}$ d. h.: „Ein Bruch bleibt dem Werthe nach unverändert, wenn man den Zähler und Nenner deſſelben mit einer und derſelben Zahl multiplicirt, oder auch durch dieſelbe dividirt.“

4) $(a+b+c)+[a-(m+c)] = a+b+c+a-(m+c) = a+a+b+c-c-m = 2a+b+(c-c)-m = 2a+b-m.$

5) Sind mehrere Differenzen zu addiren oder zu ſubtrahiren, ſo bringt man N. 5 und N. 6, §. 28, wiederholt in Anwendung.
$(a-b)+(c-d)+(f-g) = [(a-b)+(c-d)]+(f-g) = [(a+c)-(b+d)]+(f-g) = (a+c+f)-(b+d+g).$

6) $(a-b)-(c-d)-(f-g) = [(a-b)-(c-d)]-(f-g) = [(a-c)-(b-d)]-(f-g) = (a-c-f)-(b-d-g).$

nach §. 22. VII.

7) $(a+b)-(b+c)-2c = a+b-(b+c+2c) = a+b-(b+3c) = a+b-b-3c = a+0-3c = a-3c,$

nach N. 4 zu 3. §. 27.

8) $(m+n)-(n-m) = m+n+(m-n) = m+n+m-n = m+m+n-n = 2m+0 = 2m.$

nach N. 3 zu N. 4. §. 27.

9) $(m-n)+(n-m) = (m-n)-(m-n) = 0.$

10) $(m+n)-m-n-2m = [(m+n)-m-n]-2m =$ §. 22. VII.
$[(m+n)-(m+n)]-2m = 0-2m$, wofür man gewöhnlich kürzer „$-2m$“ ſchreibt.

Anmerkung. Einen Ausdruck von der Form (—a) nennt man einen subtractiven oder negativen, und man hat sich darunter stets die Differenz 0—a zu denken.

11) $(m+n)-m-n+a=(m+n)-(m+n)+a=0+a$, wofür man gewöhnlich kürzer bloß $+a$ schreibt.

Anmerkung. Einen Ausdruck von der Form (+ a) nennt man einen additiven oder positiven, und man hat sich darunter stets die Summe $0+a$ zu denken.

12) $4a-(b+g)-(m+n)=4a-b-g-m-n$.

13) $3a-(m-n)-g-h=[3a-(m-n)-g]-h=[3a+(n-m)-g]-h=3a+n-m-(g+h)$.

N. 2 zu N. 1. §. 27.

14) $-a+b=(0-a)+b=(0+b)-a=(b+0)-a=b-a$.

nach VII. §. 22.

15) $-a-b=(0-a)-b=0-(a+b)=-(a+b)$.

nach N. 3 zu N. 1. §. 27.

16) $a+(-b)=a+(0-b)=(a+0)-b=a-b$.

17) $(b-a)=-(a-b)$. N. 3 zu N. 4. §. 27.

Beweis. $b-a=0+(b-a)=0-(a-b)=-(a-b)$.

Die vorstehende Umformung lehrt nun auch, wie man eine größere Zahl von einer kleineren subtrahiren kann, nämlich:

$$4-7=-(7-4)=-3,$$

oder: $1-9=-(9-1)=-8$.

Anmerkung. Die *negative* Zahl entsteht also durch Subtraction einer größeren Zahl von einer kleineren. Früher nannte man die positiven und negativen Zahlen entgegengesetzte Größen, und indem man ihre höchst einfache Ableitung aus den Operationen mit absoluten Zahlen übersah, war man genöthiget, eine, dem Anfänger gewöhnlich unverständlich, oder doch zum wenigsten schwierig erscheinende, Lehre von den entgegengesetzten Größen einzuführen. Bei der neueren, in diesem Lehrbuche befolgten, Darstellungsweise ist eine solche Lehre nicht vorhanden.

§. 31. Fragen und Antworten.

1) Was heißt addiren? §. 18.

2) Wie werden allgemeine Zahlen addirt? §. 18 und 30.

Antw.: Man verbindet sie sämmtlich durch das Pluszeichen, und vereinigt alsdann so viele Summanden als möglich, damit die erhaltene Summe einfacher werde.

3) Wie werden numerische Zahlen addirt? §. 19 bis 21.

4) Was ist eine Differenz? §. 22.

Antw.: Ein Zeichen von der Form a — b.

5) Was bezeichnet diese Form?

Antw.: Die Zahl, die zum Subtrahenden addirt werden muß, um den Minuenden zu erhalten.

6) Was heißt ſubtrahiren? §. 22.

7) Welche Grundgeſetze ſprechen den Gegenſatz der Addition und Subtraction zu einander aus? §. 22. IV und V.

8) Welche Grundgeſetze gelten für die Addition allein? §. 18. I und II.

9) Wie zieht man eine Summe von einer Zahl ab? §. 22. VII.

10) Wie zieht man eine Zahl von einer Differenz ab? §. 22. VII, von der Rechten zur Linken geleſen.

11) Wie ſubtrahirt man eine numeriſche Zahl von einer andern numeriſchen Zahl? §. 23 bis 25.

12) Wie kann man jede Differenz, deren Subtrahend wiederum eine Differenz iſt, in eine Summe verwandeln? §. 27. N. 4 zu N. 3.

13) Wie kann man jede Summe, deren 2ter Summand eine Differenz iſt, in eine Differenz verwandeln? §. 27. N. 3 zu N. 4.

14) Wie werden zwei oder mehrere Differenzen addirt? §. 28. N. 5.

15) Wie werden zwei oder mehrere Differenzen ſubtrahirt? §. 28. N. 6.

16) Was erhält man, wenn man in den Additions- und Subtractions-Geſetzen anſtatt des Pluszeichens das Multiplicationszeichen und anſtatt des Minuszeichens das Diviſionszeichen ſetzt? §. 30. 3.

17) Warum kann man die letzteren Zeichen für die erſteren ſetzen? §. 7. 3 und 4.

18) Was hat man ſich unter dem Zeichen 0 zu denken? §. 13*.

19) Was erhält man, wenn man 0 zu irgend einer Zahl addirt, oder davon ſubtrahirt? §. 30. 1 und 2.

20) Was hat man ſich unter dem ſubtractiven Ausdruck (— a) eigentlich zu denken, und wie kann man alsdann mit einem ſolchen Ausdruck rechnen?

Antw.: Man hat ſich darunter die Differenz (0 — a) zu denken, und kann alsdann mit demſelben eben ſo rechnen, wie mit jeder andern Differenz.

21) Wie ſubtrahirt man eine größere Zahl von einer kleineren?

Antw.: Man zieht die kleinere Zahl von der größeren ab und giebt dem Differenzwerth das Minuszeichen.

22) Was findet ſtatt, wenn man ſowohl zum Minuenden als auch zum Subtrahenden einer Differenz eine und dieſelbe Zahl addirt, oder davon ſubtrahirt? §. 29. N. 7.

23) Wenn muß man bei Differenzen nothwendig Klammern anwenden? §. 26.

Zweites Kapitel.

Die Multiplication und Division.

I. Die Multiplication.

§. 32. Eine Summe von lauter gleichen Summanden, z. B.:

a+a+a+a+ . . . . . von b Summanden,

schreibt man kürzer: a.b, oder a×b, oder auch bloß ab, (gelesen: a mal b), und nennt eine solche Form ein Product, so wie die Zahl a den Multiplicandus, und b den Multiplicator, oder auch beide die Factoren des Products.*)

Ein Product bezeichnet daher die Zahl, welche entsteht, wenn man den einen Factor so oft zu sich selbst addirt, als der andere Einheiten enthält, und multipliciren heißt, eine Zahl — den Multiplicanden — als Summand so oft nehmen, als eine andere Zahl — der Multiplicator — Einheiten enthält.

Da nun die Multiplication als ein specieller Fall der Addition zu betrachten ist, so müssen auch die allgemeinen Gesetze der Addition für die Multiplication gelten, wobei man nur nöthig hat, die Operationszeichen zu ändern.

a) Grundgesetze:

I. $ab = ba$.

In Worten: „Man kann die Factoren eines Products beliebig versetzen."

II. $(ab)c = (ac)b = a(bc)$.

In Worten: „Ein Product wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man einen der Factoren damit

*) Ist der eine Factor eines Productes eine Ziffer, wie z. B. die 3 in 3.a, so wird derselbe ein Coefficient genannt, und besteht ein Product aus lauter gleichen Factoren z. B. aa, aaa, aaa . . . . n mal als Factor, so schreibt man dafür kürzer: a^2, a^3, a^n, (gelesen a hoch 2, a hoch 3, a hoch n) und nennt ein solches Zeichen eine Potenz.

Antw.: Die Zahl, die zum Subtrahenden addirt werden muß, um den Minuenden zu erhalten.

6) Was heißt ſubtrahiren? §. 22.

7) Welche Grundgeſetze ſprechen den Gegenſatz der Addition und Subtraction zu einander aus? §. 22. IV und V.

8) Welche Grundgeſetze gelten für die Addition allein? §. 18. I und II.

9) Wie zieht man eine Summe von einer Zahl ab? §. 22. VII.

10) Wie zieht man eine Zahl von einer Differenz ab? §. 22. VII, von der Rechten zur Linken geleſen.

11) Wie ſubtrahirt man eine numeriſche Zahl von einer andern numeriſchen Zahl? §. 23 bis 25.

12) Wie kann man jede Differenz, deren Subtrahend wiederum eine Differenz iſt, in eine Summe verwandeln? §. 27. N. 4 zu N. 3.

13) Wie kann man jede Summe, deren 2ter Summand eine Differenz iſt, in eine Differenz verwandeln? §. 27. N. 3 zu N. 4.

14) Wie werden zwei oder mehrere Differenzen addirt? §. 28. N. 5.

15) Wie werden zwei oder mehrere Differenzen ſubtrahirt? §. 28. N. 6.

16) Was erhält man, wenn man in den Additions- und Subtractions-Geſetzen anſtatt des Pluszeichens das Multiplicationszeichen und anſtatt des Minuszeichens das Diviſionszeichen ſetzt? §. 30. 3.

17) Warum kann man die letzteren Zeichen für die erſteren ſetzen? §. 7. 3 und 4.

18) Was hat man ſich unter dem Zeichen 0 zu denken? §. 13*.

19) Was erhält man, wenn man 0 zu irgend einer Zahl addirt, oder davon ſubtrahirt? §. 30. 1 und 2.

20) Was hat man ſich unter dem ſubtractiven Ausdruck (— a) eigentlich zu denken, und wie kann man alsdann mit einem ſolchen Ausdruck rechnen?

Antw.: Man hat ſich darunter die Differenz (0 — a) zu denken, und kann alsdann mit demſelben eben ſo rechnen, wie mit jeder andern Differenz.

21) Wie ſubtrahirt man eine größere Zahl von einer kleineren?

Antw.: Man zieht die kleinere Zahl von der größeren ab und giebt dem Differenzwerth das Minuszeichen.

22) Was findet ſtatt, wenn man ſowohl zum Minuenden als auch zum Subtrahenden einer Differenz eine und dieſelbe Zahl addirt, oder davon ſubtrahirt? §. 29. N. 7.

23) Wenn muß man bei Differenzen nothwendig Klammern anwenden? §. 26.

Zweites Kapitel.

Die Multiplication und Division.

I. Die Multiplication.

§. 32. Eine Summe von lauter gleichen Summanden, z. B.:

a+a+a+a+ . . . . . von b Summanden,

schreibt man kürzer: a.b, oder a×b, oder auch bloß ab, (gelesen: a mal b), und nennt eine solche Form ein Product, so wie die Zahl a den Multiplicandus, und b den Multiplicator, oder auch beide die Factoren des Products.*)

Ein Product bezeichnet daher die Zahl, welche entsteht, wenn man den einen Factor so oft zu sich selbst addirt, als der andere Einheiten enthält, und multipliciren heißt, eine Zahl — den Multiplicanden — als Summand so oft nehmen, als eine andere Zahl — der Multiplicator — Einheiten enthält.

Da nun die Multiplication als ein specieller Fall der Addition zu betrachten ist, so müssen auch die allgemeinen Gesetze der Addition für die Multiplication gelten, wobei man nur nöthig hat, die Operationszeichen zu ändern.

a) Grundgesetze:

I. $ab = ba$.

In Worten: „Man kann die Factoren eines Products beliebig versetzen."

II. $(ab)c = (ac)b = a(bc)$.

In Worten: „Ein Product wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man einen der Factoren damit

*) Ist der eine Factor eines Productes eine Ziffer, wie z. B. die 3 in 3.a, so wird derselbe ein Coefficient genannt, und besteht ein Product aus lauter gleichen Factoren z. B. aa, aaa, aaa . . . . n mal als Factor, so schreibt man dafür kürzer: a^2, a^3, a^n, (gelesen a hoch 2, a hoch 3, a hoch n) und nennt ein solches Zeichen eine Potenz.

multiplicirt, und das, was herauskommt, wiederum mit dem andern Factor."

III. $a\,m = b\,m$, wenn $a = b$ und $m = m$.

In Worten: „Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt wiederum Gleiches."

b) Abgeleitete Multiplications-Gesetze.

IV. $(a+b)\,c = a\,c + b\,c$.

In Worten: „Eine Summe wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man jeden Summanden mit derselben multiplicirt, und die erhaltenen Producte wiederum addirt", oder, von der Rechten zur Linken gelesen: „zwei Producte mit gleichem Factor werden addirt, wenn man die nicht gemeinschaftlichen Factoren addirt, und ihre Summe wiederum mit dem gemeinschaftlichen Factor multiplicirt."

V. $(a-b)\,c = a\,c - b\,c$.

In Worten: „Eine Differenz wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man sowohl den Minuend als auch den Subtrahend mit derselben multiplicirt, und letzteres Product von ersterem wieder abzieht," oder, von der Rechten zur Linken gelesen: „zwei Producte mit gleichem Factor werden subtrahirt, wenn man die nicht gemeinschaftlichen Factoren subtrahirt, und ihre Differenz mit dem gemeinschaftlichen Factor multiplicirt."

Beweis ad IV. $(a+b)c$ ist ein Product und bezeichnet die Summe: $(a+b)+(a+b)+(a+b)+\ldots$ von c Summanden. In dieser Summe kommt nun aber a, cmal, und auch b, cmal vor, daher ist:

$(a+b)\,c = (a+a+a+\ldots$ cmal als Summand$) + (b+b+b+\ldots$ cmal als Summand), und dies giebt wiederum kürzer geschrieben: $ac+bc=(a+b)c$.

Beweis ad V. $(a-b)c$ ist ein Product und bezeichnet die Summe: $(a-b)+(a-b)+(a-b)+\ldots$ von c Summanden. In dieser Summe kommt nun aber a, cmal und auch b, cmal vor, und es ist, wenn man nach §. 28. 5 addirt:

$(a-b)c=(a+a+a+\ldots.\text{ cmal})-(b+b+b+\ldots.\text{ cmal})$, und dies giebt kürzer geschrieben: $ac-bc=(a-b)c$.

§. 33. Zusatz: Es ist $m=1.m$.

Beweis: Die Zahl m enthält die 1 mmal.

§. 34. Anwendungen.

1) Ist eine Summe von mehreren Summanden mit der einfachen Zahl, oder auch eine Summe mit einer andern Summe zu multipliciren, so kommt das Gesetz IV. §. 32 wiederholt in Anwendung, z. B.:
$(a+b+d)c=ac+bc+dc$, denn:
$(a+b+d)c=[(a+b)+d]c=(a+b)c+dc=ac+bc+dc$.

2) $(a-b-d)c=ac-bc-dc$, denn nach V. §. 32 ist:
$(a-b-d)c=[(a-b)-d]c=(a-b)c-dc=ac-bc-dc$.

3) $am-an=(m-n)a$. §. 32. V. v. d. R. z. L. gelesen.

4) $(am-a)=(m-1)a$.

5) $3a-2a=(3-2)a=1.a=a$.

6) $2a+2b=2(a+b)$. §. 32. IV. v. d. R. z. L. gelesen.

7) $ab+2a=a(2+b)$.
§. 32 V. v. d. R. z. L. gelesen, wiederholt angewendet.

8) $am-bm-m=(a-b)m-1m=(a-b-1)m$.

9) $(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$. Hieraus läßt sich die Regel ableiten:

„Sind Summen mit einander zu multipliciren, so multiplicire man jeden Summanden des einen Factors mit jedem Summanden des andern Factors, und addire die erhaltenen Producte.“

10) $(a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b)=aa-ab+ab-bb=[(aa-ab)+ab]-bb=aa-bb=a^2-b^2$.

In Worten: „Das Product der Summe und der Differenz zweier Zahlen giebt die Differenz der Quadrate dieser Zahlen;“ daher auch umgekehrt:

11) $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$.

In Worten: „Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen giebt das Product der Summe und Differenz dieser Zahlen.“

12) $55^2-52^2=(55+52)(55-52)=107.3=321$.

13) $29^2-9^2=38.20=760$.

14) $(30+5)(30-5)=30^2-5^2=900-25=875$.

15) $101^2 - 99^2 = 400$.

16) $(100 + 12)(100 - 12) = 9856$.

17) $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Man schreibt gewöhnlich den Multiplicator unter den Multiplicandus und führt die Multiplication alsdann, nach der Regel (No. 9), in nachstehender Art aus:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline aa+ab \\ \quad +ab+bb \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

In Worten: „Das Quadrat eines zweitheiligen Ausdrucks (auch Binom genannt), giebt das Quadrat des ersten Theils + dem doppelten Product des ersten Theils in den zweiten, + dem Quadrat des zweiten Theils."

18) $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b) = a^2 - ab + -(ab - b^2) = a^2 - ab + (b^2 - ab) = a^2 + b^2 - (ab + ab) = a^2 + b^2 - 2ab = a^2 - 2ab + b^2$.

19) $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

20) $a.0 = a.(p-p) = ap - ap = 0$. §. 13.*

Es giebt also jede Zahl mit 0 multiplicirt, wiederum 0.

21) $a.(-b) = a.(0-b) = a.0 - ab = 0 - ab = -ab$.

Es giebt also eine negative Zahl, mit einer absoluten Zahl multiplicirt, ein negatives Resultat.

§. 30 N. 16. §. 30 N. 15.

22) $(a + b)(-c) = -ac + (-bc) = -ac - bc = -(ac + bc)$.

§. 35. Aufgabe. Man soll zwei einziffrige Zahlen mit einander multipliciren.

Auflösung: Man setze den Multiplicand so oft als Summand, als der Multiplicator Einheiten enthält und addire hierauf die erhaltenen Summanden, z. B.:

$$5.3 = 5 + 5 + 5 = 10 + 5 = 15.$$

Für das schnellere Rechnen ist es nöthig, daß man die Productenwerthe von je zwei einziffrigen Zahlen sämmtlich auswendig weiß. Diese Productenwerthe findet man für die ersten zwölf Zahlen in nachstehender Tabelle, welche das Einmaleins genannt wird.

1	mal	1	ist	1	2	mal	1	ist	2	3	mal	1	ist	3	4	mal	1	ist	4
1	=	2	=	2	2	=	2	=	4	3	=	2	=	6	4	=	2	=	8
1	=	3	=	3	2	=	3	=	6	3	=	3	=	9	4	=	3	=	12
1	=	4	=	4	2	=	4	=	8	3	=	4	=	12	4	=	4	=	16
1	=	5	=	5	2	=	5	=	10	3	=	5	=	15	4	=	5	=	20
1	=	6	=	6	2	=	6	=	12	3	=	6	=	18	4	=	6	=	24
1	=	7	=	7	2	=	7	=	14	3	=	7	=	21	4	=	7	=	28
1	=	8	=	8	2	=	8	=	16	3	=	8	=	24	4	=	8	=	32
1	=	9	=	9	2	=	9	=	18	3	=	9	=	27	4	=	9	=	36
1	=	10	=	10	2	=	10	=	20	3	=	10	=	30	4	=	10	=	40
1	=	11	=	11	2	=	11	=	22	3	=	11	=	33	4	=	11	=	44
1	=	12	=	12	2	=	12	=	24	3	=	12	=	36	4	=	12	=	48

5	mal	1	ist	5	6	mal	1	ist	6	7	mal	1	ist	7	8	mal	1	ist	8
5	=	2	=	10	6	=	2	=	12	7	=	2	=	14	8	=	2	=	16
5	=	3	=	15	6	=	3	=	18	7	=	3	=	21	8	=	3	=	24
5	=	4	=	20	6	=	4	=	24	7	=	4	=	28	8	=	4	=	32
5	=	5	=	25	6	=	5	=	30	7	=	5	=	35	8	=	5	=	40
5	=	6	=	30	6	=	6	=	36	7	=	6	=	42	8	=	6	=	48
5	=	7	=	35	6	=	7	=	42	7	=	7	=	49	8	=	7	=	56
5	=	8	=	40	6	=	8	=	48	7	=	8	=	56	8	=	8	=	64
5	=	9	=	45	6	=	9	=	54	7	=	9	=	63	8	=	9	=	72
5	=	10	=	50	6	=	10	=	60	7	=	10	=	70	8	=	10	=	80
5	=	11	=	55	6	=	11	=	66	7	=	11	=	77	8	=	11	=	88
5	=	12	=	60	6	=	12	=	72	7	=	12	=	84	8	=	12	=	96

9	mal	1	ist	9	10	mal	1	ist	10	11	mal	1	ist	11	12	mal	1	ist	12
9	=	2	=	18	10	=	2	=	20	11	=	2	=	22	12	=	2	=	24
9	=	3	=	27	10	=	3	=	30	11	=	3	=	33	12	=	3	=	36
9	=	4	=	36	10	=	4	=	40	11	=	4	=	44	12	=	4	=	48
9	=	5	=	45	10	=	5	=	50	11	=	5	=	55	12	=	5	=	60
9	=	6	=	54	10	=	6	=	60	11	=	6	=	66	12	=	6	=	72
9	=	7	=	63	10	=	7	=	70	11	=	7	=	77	12	=	7	=	84
9	=	8	=	72	10	=	8	=	80	11	=	8	=	88	12	=	8	=	96
9	=	9	=	81	10	=	9	=	90	11	=	9	=	99	12	=	9	=	108
9	=	10	=	90	10	=	10	=	100	11	=	10	=	110	12	=	10	=	120
9	=	11	=	99	10	=	11	=	110	11	=	11	=	121	12	=	11	=	132
9	=	12	=	108	10	=	12	=	120	11	=	12	=	132	12	=	12	=	144

§. 36. **Aufgabe.** Man soll mehrziffrige Zahlen multipliciren:

a) Der eine Factor ist eine einziffrige, der andere aber eine mehrziffrige Zahl.

Auflösung: Man multiplicire die gegebene einziffrige Zahl mit jeder Ordnungs-Einheit der mehrziffrigen Zahl und bilde aus der erhaltenen Summe wiederum eine numerische Zahl. §. 32. IV; z. B.:

$$2034.5 = (2.1000 + 0.100 + 3.10 + 4)\,5 =$$
$$2.5.1000 + 0.5.100 + 15.10 + 20 =$$

$10.1000+0.100+(10+5)10+2.10+0.1$
$10.1000+0.100+1.100+5.10+2.10+0.1$

Geſetz IV. §. 32 v. d. R. z. L.

$10.1000+(0+1)100+(5+2)10+0.1$
$10.1000+1.100+7.10+0.1=10170.$

b) Beide Factoren des Products ſind mehrziffrig.

Auflöſung: Man multiplicire jede Ordnungs-Einheit des Multiplicators mit jeder Ordnungs-Einheit des Multiplicanden, nach §. 34.9, und bilde aus der erhaltenen Summe eine numeriſche Zahl, z. B.:

$$126.30=(1.100+2.10+6)(3.10+0.1)=3780.$$

Rechnung:

$$\begin{array}{r} 1.100+2.10+6 \\ \hline 3.10+0.1 \\ \hline 1.100.0+2.10.0+6.0 \\ 3.1000+2.3.100+3.6.10 \\ \hline 3.1000+6.100+18.10+0.1= \\ 3.1000+6.100+(10+8)10+0.1= \\ 3.1000+6.100+1.100+8.10+0.1= \\ 3.1000+7.100+8.10+0.1=3780. \end{array}$$

Anmerkung. Da die Multiplication mit 0 ſtets wieder 0 giebt, (§. 34. 18), und 0 zu einer Zahl addirt, dieſelbe unverändert läßt, (§. 30. 1), ſo multiplicire man nur mit den bedeutlichen Ziffern, und gebe dem Reſultate ſo viele Nullen zur Rechten, als die Factoren des Products zuſammen rechts Nullen haben; z. B.:

$220.40=22.10.4.10=22.4.100=88.100=8800.$

Aus dem Vorſtehenden hat man ein kürzeres Verfahren für die Multiplication der numeriſchen Zahlen abgeleitet. Man ſetzt nämlich den Multiplicator unter den Multiplicanden und multiplicirt mit jeder Ziffer des Multiplicators jede Ziffer des Multiplicanden. Hierbei iſt es gleichgültig, ob man mit der niedrigſten oder höchſten Ziffer des Multiplicators zu multipliciren anfängt, nur muß man im erſteren Falle die Partial-Producte links, und im anderen Falle dieſelben rechts herausrücken; z. B.:

204
583
612
1632
1020
118932

Man sagt also bei dieser Auflösung: 3 mal 4 giebt 12, und da die Zahl 12 einen Zehner enthält, so setzt man nur die 2 in die Stelle der Einer und behält den Zehner einstweilen im Sinne. Hierauf multiplicirt man die 3 mit den Zehnern des Multiplicandus; dies giebt 3.0=0, und addirt dazu den im Sinne behaltenen Zehner, den man in die Stelle der Zehner setzt. Hierauf sagt man ferner: 3 mal 2 Hunderter geben 6 Hunderter, die in Stelle der Hunderter kommen. Hat man mit den Einern durchmultiplicirt, so geht man zu den Zehnern des Multiplicators über, und verfährt ganz so wie bei den Einern, nur daß man die zuerst erhaltene Ziffer (2) unter die Zehner setzt, weil 4.80 2 Zehner und 3 Hunderter geben. Letztere behält man wiederum im Sinne, und addirt sie demnächst zu den Hundertern u. s. w. Hat man aber auf diesem Wege die einzelnen Partial-Producte gebildet, so giebt zuletzt deren Addition den verlangten Productenwerth. Multiplicirt man aber von der Linken zur Rechten, so kommt die Rechnung, wie folgt, zu stehen:

204
583
1020
1632
612
118932

Man multiplicirt also zuerst: 5 Hunderter mal 4, giebt 20 Hunderter oder zwei Tausender. Diese behält man im Sinne und setzt in Stelle der fehlenden Hunderter eine Null. Alsdann besteht das nächste Partial-Product aus 500.0 Zehner +2000=0+2000=2 Tausender, die in die Stelle der

Tausender kommen. Zuletzt ist 500.200 = 10 Zehntausender, = 1 Hunderttausender, welcher in die Stelle der Hunderttausender gesetzt wird, nachdem man die Stelle der fehlenden Zehntausender durch eine Null ausgefüllt hat. Hierauf multiplicirt man mit der 8 im Multiplicator, und sagt: 80.4 giebt 32 Zehner = 3 Hunderter + 2 Zehner. Diese 2 Zehner rückt man um eine Stelle rechts hinaus, weil die im ersten Partial-Producte zur Rechten stehende Null die Stelle der Hunderter ausfüllt. Die 3 Hunderter behält man aber einstweilen im Sinne, und addirt sie alsdann zu dem Partial-Product der Hunderter. So fortfahrend erhält man dasselbe Resultat, wie bei der ersten Auflösung.

Andere Beispiele:

1) 5399.6000 = 32394000.
2) 37045.24 = 889080.
3) 25890000.71321 = 1846500690000.

Rechnung:

```
      25890000
      71321
     ---------
      25890000
     5178
    7767
   2589
  18123
  ----------
  1846500690000
```

4) 4580100.4001000 = 18324980100000.

```
      4580100
       4001000
     ----------
      45801
   183204
  ----------
  18324980100000
```

5) 37526198.57402 = 2154078817596.
6) 48.4.5 = 192.5 = 960.
7) 72.3.8.2 = 216.8.2 = 1728.2 = 3456.
8) 23.45.67.891 = 1035.67.891 = 61786395.

Anmerkungen:

1) Als Probe für die richtige Rechnung wendet man bei der Multiplication das Grundgesetz ab = ba an. (§. 32. I). Man multiplicirt also noch einmal, aber in anderer Ordnung.
2) Bei der Multiplication der numerischen Zahlen kann das Gesetz: a(bc) = (ab)c (§. 32 II.) mit Vortheil in Anwendung gebracht werden, wenn sich der Multiplicator in Factoren zerlegen läßt;

$15901 . 15 = (15901 . 3) . 5 = 47703 . 5 = 238515.$
$37045 . 24 = (37045 . 4) . 6 = 148180 . 6 = 889080.$

§. 37. Gebrauch der Klammern bei Producten.

Jeder aus einer Summe oder Differenz bestehende Factor eines Products ist nach Gesetz IV. und V. §. 32 in Klammern einzuschließen, z. B.:

$(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$ (§. 34 N. 11). Dagegen ist:

$(a+b) . a-b = a^2+ab-b$, oder:

$a+b . a-b = a+ab-b.$

II. Die Division.

§. 38. So wie die Zahl a bmal, oder auch die Zahl b amal zu sich selbst addirt werden kann, woraus das Product $ab = c$, oder auch $ba = c$ entsteht, eben so kann umgekehrt die Zahl a bmal von c, oder auch die Zahl b amal von c subtrahirt werden, und man erhält alsdann aus b und c wiederum a, und aus a und c wiederum b dargestellt. Dieses wiederholte Wegdenken einer Zahl von einer andern größeren bildet den Gegensatz der Multiplication, und wird die Division genannt.

Das Verstandesgeschäft des Dividirens versinnlichen wir uns durch das Zeichen $\frac{c}{b} = a$, oder: $\frac{c}{a} = b$. Die Form $\frac{c}{a}$ wird ein Quotient, so wie die Zahl c der Dividend und die Zahl a der Divisor genannt.

Aus dem Gegensatze der Division und Multiplication folgt nun, daß, wenn man eine Zahl a durch eine andere b dividirt, und den erhaltenen Quotienten wieder mit der Zahl b (Divisor) multiplicirt, die Zahl a unverändert bleiben muß. Diese Eigenschaft eines jeden Quotienten läßt uns folgende allgemeinere Erklärungen hinstellen:

1) Ein Quotient bezeichnet die Zahl, die, mit dem Divisor multiplicirt, den Dividenden wieder zum Vorschein bringt, und

2) Dividiren heißt eine Zahl (den Quotientenwerth) finden, die, mit dem Divisor multiplicirt, den Dividenden giebt.

§. 39. Für die Division bemerken wir folgende Gesetze.

a) Grundgesetze.

I. $\frac{a}{b} \cdot b = a.$

In Worten: „Ein Quotient mit seinem Divisor multiplicirt, giebt den Dividenden"; oder, von der Rechten zur Linken gelesen: „Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man sie durch eine Zahl dividirt und gleichzeitig mit derselben Zahl multiplicirt."

II. $\frac{a \cdot b}{b} = a.$

In Worten: „Ein Product, durch einen seiner Factoren dividirt, giebt den andern Factor", oder, von der Rechten zur Linken gelesen: „Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man sie mit einer Zahl multiplicirt und gleichzeitig wieder durch dieselbe dividirt."

III. $\frac{a}{m} = \frac{b}{m}$, wenn $a = b$ und $m = m$.

In Worten: „Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt wiederum Gleiches;" oder: „Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Seiten derselben durch eine und dieselbe Zahl dividirt".

b) Abgeleitete Gesetze.

IV. Allgemeineres Divisionsgesetz:

1) $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.

In Worten: „Eine Summe wird durch eine Zahl dividirt, wenn man jeden Summanden durch dieselbe dividirt, und die erhaltenen Quotienten wiederum addirt"; oder, von der Rechten zur Linken gelesen: „Zwei Quotienten mit gleichen Divisoren werden addirt, indem man ihre Dividenden addirt, und die erhaltene Summe wiederum durch den gemeinschaftlichen Divisor dividirt."

2) $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$.

In Worten: „Eine Differenz wird durch eine Zahl dividirt, wenn man sowohl den Minuenden als auch den Subtrahenden durch diese Zahl dividirt, und letzteren Quotienten wiederum von dem ersteren subtrahirt"; oder, von der Rechten zur Linken gelesen: „Quotienten mit gleichen Divisoren werden von einander subtrahirt, indem man die Dividenden subtrahirt und die erhaltene Differenz wiederum durch den gemeinschaftlichen Divisor dividirt."

V. Specielleres Divisionsgesetz:

$\frac{A}{B} = a + \frac{A-aB}{B}$.

In Worten: „Ein Quotient wird in eine Summe von zwei Summanden, deren erster stets eine ganze Zahl ist, verwandelt, wenn man den ersten Summanden als ganze Zahl beliebig annimmt, dann aber den zweiten Summanden dadurch bildet, daß man den ersten mit dem Divisor multiplicirt, und das, was herauskommt, vom Dividenden subtrahirt und die erhaltene Differenz wiederum durch den Divisor dividirt."

Beweise:

ad IV. Es soll sein: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$. Man schaffe die Division nach Grundgesetz I. weg, d. h. man multiplicire mit c.

$$\frac{a+b}{c} \cdot c = \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) c$$

$$a + b = \frac{a}{c} \cdot c + \frac{b}{c} \cdot c \text{ §. 32. IV.}$$

$a + b = a + b$. Es kommt also durch richtiges Umformen Gleiches heraus, weshalb auch die Gleichung IV richtig ist.

ad V. Es soll sein: $\frac{A}{B} = a + \frac{A-aB}{B}$; mit B multiplicirt:

$$\frac{A}{B} \cdot B = \left(a + \frac{A-aB}{B}\right) B$$

$$A = aB + \frac{A - aB}{B} . B$$

$$A = aB + (A - aB) = A + aB - aB = A.$$

§. 40. Zusätze.

1) $\frac{a}{a} = 1.$

In Worten: „Jede Zahl, durch sich selbst dividirt, giebt 1."

Beweis: $a = 1 . a$, also auch:

$$\frac{a}{a} = \frac{1 . a}{a} = 1. \quad \text{§. 39. II.}$$

2) $\frac{a}{1} = \frac{1 . a}{1} = a.$

In Worten: „Jede Zahl, durch 1 dividirt, giebt dieselbe Zahl wieder."

3) $\frac{0}{a} = 0$, denn:

$\frac{0}{a} = \frac{p - p}{a} = \frac{p}{a} - \frac{p}{a} = 0.$ §. 39. IV. 2. Es giebt also 0, durch irgend eine Zahl dividirt, wieder Null.

4) $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}.$

Beweis: $\frac{-a}{b} = \frac{0 - a}{b} = \frac{0}{b} - \frac{a}{b} = 0 - \frac{a}{b} = -\frac{a}{b}.$

§. 41. Anwendungen.

1) $\frac{2m}{2} = m.$

2) $\frac{m}{2} . 2 = m.$

3) $\frac{6}{2} = \frac{2 . 3}{2} = 3.$

4) $\frac{4ab}{2a} = \frac{2 . 2ab}{2a} = 2b.$

5) $\frac{a - b + d}{c} = \frac{(a - b) + d}{c} = \frac{a - b}{c} + \frac{d}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c} + \frac{d}{c}.$

6) $\frac{2a + b + c + d}{a} = 2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a}.$

7) $\frac{9}{3} = \frac{3 + 3 + 3}{3} = \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} = 1 + 1 + 1 = 3;$

oder: $\frac{9}{3} = \frac{3 . 3}{3} = 3.$

8) $\frac{(mn+n)6}{3n} = 2(m+1)$.

9) $\frac{m-mn-1}{m} = -\left(n-1+\frac{1}{m}\right)$.

10) $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{2a} = 2b$.

11) $\frac{(mn-m)n+(m-mn)}{m} = (n-1)(n-1) = n^2-2n+1$.

12) $\frac{m-n}{n-m} - 1 - \frac{0}{a} = -2$.

13) Das speciellere Divisionsgesetz (§. 39. V) wird gewöhnlich in Anwendung gebracht, wenn Summen durch Summen zu dividiren sind; z. B.:

$$\frac{mm+2mn+nn}{m+n}$$

Bei dieser Division verfährt man wie folgt:

1) Man ordnet den Dividend und Divisor nach einem und demselben Buchstaben, damit der erste Summand möglichst einfach wird.

2) Man dividirt den ersten Summanden des Dividenden durch den ersten Summanden des Divisors, nach §. 39. II, und nimmt den erhaltenen Werth als ersten Summanden für a in der Formel V §. 39 an.

3) Man bildet den zweiten Summanden $\frac{A-aB}{B}$.

Ausführung: $\frac{mm+2mn+nn}{m+n}$

$$= m + \frac{(mm+2mn+nn)-m(m+n)}{m+n}$$

$$= m + \frac{mm+2mn+nn-mm-mn}{m+n}$$

$$= m + \frac{mn+nn}{m+n}.$$

4) Ist der zweite Summand nicht = 0 geworden, so wendet man das speciellere Divisionsgesetz ebenfalls auf ihn an.

5) Findet sich alsdann, daß der dritte Summand ebenfalls nicht = 0 wird, so wendet man das speciellere Divisionsgesetz auch auf diesen Summanden an, und setzt dieses Verfahren so lange fort, bis man auf den Summanden 0 stößt, oder die Beschaffenheit der jedesmal zuletzt erhaltenen Summanden (Quotienten) zu erkennen giebt, daß

die Division sich nicht vollständig*) ausführen läßt, in welchem Falle die fortgesetzte Rechnung auf eine Reihe von unendlich vielen Summanden führt.

Weitere Ausführung:

$$\frac{mm+2mn+nn}{m+n} = m+n+\frac{(mn+nn)-n(m+n)}{m+n}$$

$$= m+n+\frac{(mn+nn)-(mn+nn)}{m+n}$$

$$= m+n+\frac{0}{m+n}$$

$$= m+n+0 = m+n.$$

Für das schnellere Rechnen ist es sehr bequem, die Division nach folgendem Schema auszuführen:

Divisor	Dividend	Quotientenwerth
m + n	mm + 2mn + nn	m + n
	mm + mn	
	— —	
	mn + nn	
	mn + nn	
	— —	
	0	

Man schreibt nämlich den Productenwerth von aB unter den Dividend A und zwar dergestalt, daß die gleichnamigen Summanden unter einander zu stehen kommen. Hierauf zieht man aB von A ab, und dividirt den erhaltenen Differenzwerth (auch Rest genannt) wiederum durch den Divisor, bis man zuletzt auf den Rest 0 kommt, oder die Beschaffenheit der erhaltenen Reste zu erkennen giebt, daß die Division nie aufgehen kann.

14)

a + b	aaa + 3aab + 3abb + bbb	aa + 2ab + bb
	aaa + aab	
	— —	
	2aab + 3abb + bbb	
	2aab + 2abb	
	— —	
	abb + bbb	
	abb + bbb	
	— —	
	0	

*) Dies wird immer der Fall sein müssen, wenn der Dividend kein Vielfaches vom Divisor ist.

§. 42. Aufgabe. Man soll zwei numerische Zahlen durch einander dividiren.

Auflösung: Man wende die Formel $\frac{A}{B}=a+\frac{A-aB}{B}$ an, wobei der erste Summand a aus der höchsten Ordnung des Dividenden zu bilden ist, damit der zweite Summand möglichst einfach werde, und das verlangte Resultat gleichzeitig numerisch geordnet zum Vorschein komme; z. B.:

1) $\frac{644}{4}=\frac{6.100+4.10+4}{4}=1.100+\frac{6.100+4.10+4-4.100}{4}$

$=1.100+\frac{2.100+4.10+4}{4}=1.100+\frac{20.10+4.10+4}{4}$

$=1.100+\frac{24.10+4}{4}$.

Wendet man nun auf diesen zweiten Summanden wiederum die Formel an, und untersucht jetzt mittelst des Einmaleins, wie oft die 4 in 24 Zehnern enthalten ist, so erhält man als neuen Summanden 6.10; also:

$\frac{644}{4}=1.100+6.10+\frac{24.10+4-4.6.10}{4}=1.100+6.10+\frac{4}{4}$

$=1.100+6.10+1=161$.

Das vorstehende Verfahren wird bedeutend abgekürzt, wenn man das Schema für die kürzere Rechnung, §. 41, in Anwendung bringt:

Divisor	Dividend	Quotientenwerth.
4	644	161
	4	
	24	
	24	
	4	
	4	
	0	

Man sagt also, indem man sich die Hunderter bloß hinzudenkt, 4 in 6 geht 1 mal; hierauf zieht man 1.4=4 von 6 ab, und erhält zum Rest 2 (Hunderter). Nimmt man dazu noch 4 Zehner, so hat man 24 Zehner, in welchen die 4 6Omal enthalten ist. Bildet man hierauf wieder A—aB, so bleibt noch 4 übrig, und der neue Summand $\frac{4}{4}$ giebt 1.

2) $\frac{456}{19} = \frac{4.100+5.10+6}{19} = \frac{40.10+5.10+6}{19} = \frac{45.10+6}{19} =$

$2.10 + \frac{45.10+6-2.19.10}{19} = 2.10 + \frac{45.10+6-38.10}{19} =$

$2.10 + \frac{7.10+6}{19} = 2.10 + \frac{76}{19} = 2.10 + 4 + \frac{76-4.19}{19} =$

$2.10 + 4 + \frac{76-76}{19} = 2.10 + 4 + 0 = 24.$

Kürzer:

19	456	24
	38	
	76	
	76	
	0	

Ist der Divisor, wie in dem vorstehenden Beispiele, zweiziffrig, so fragt man sich, wie viel mal derselbe in der, durch die beiden ersten Ziffern des Dividenden bezeichneten Zahl, oder, wenn diese kleiner sein sollte als der Divisor, wie viel mal derselbe in der, durch die drei ersten Ziffern des Dividenden bezeichneten Zahl, enthalten ist. Die so gefundene Zahl (2) nimmt man als erste Ziffer des Quotientenwerthes an, multiplicirt damit den Divisor, und zieht das erhaltene Product (38) vom Dividenden ab. Hierauf nimmt man zu dem erhaltenen Rest (7) noch die nächste Ziffer des Dividenden (die 6) hinzu, und beginnt die Rechnung aufs Neue, indem man untersucht, wie oft der Divisor (19) in dem Rest (76) enthalten ist u. s. w.

3) $\frac{4729}{98} = 48 + \frac{25}{98}$.

Rechnung:

98	4729	48
	392	
	809	
	784	
	25	

Hier bleibt ein Rest 25, in welchem 98 nicht mehr enthalten ist, und es muß daher dieser Rest dem Quotientenwerthe in der Form $\frac{25}{98}$ beigefügt werden. Man erhält daher: $\frac{4729}{98} = 48 + \frac{25}{98}$, oder, kürzer geschrieben, $= 48\frac{25}{98}$, indem man sich das $+$ Zeichen bloß hinzudenkt.

4) $\frac{231500}{485} = 477\frac{155}{485}$.

Rechnung:

485	231500	$477\frac{155}{485}$
	1940..	
	3750.	
	3395.	
	3550	
	3395	
	155	

Da man bei einem mehrziffrigen Divisor nicht immer sogleich erkennen kann, wie oft derselbe in dem Dividenden enthalten ist, so erleichtert man sich die Arbeit dadurch, daß man zuerst mit der höchsten Ziffer des Divisors in den Dividenden dividirt, und daher im obigen Beispiele fragt, wie oft 4 in 23 enthalten sei. Bei diesem Verfahren kann man aber leicht eine zu große Zahl bekommen, was sich jedoch bald dadurch zeigt, daß man nicht abziehen kann. In diesem Falle nimmt man im Quotientenwerthe eine Einheit weniger, und macht die Rechnung noch einmal.

5) $\frac{1418030800}{280} = 5064395\frac{200}{280}$.

Rechnung:

280	1418030800	5064395$\frac{200}{280}$
	1400.....	
	1803....	
	1680....	
	1230...	
	1120...	
	1108..	
	840..	
	2680.	
	2520.	
	1600	
	1400	
	200	

In diesem Beispiel trat bei Bestimmung der zweiten Ziffer des Quotientenwerthes der Fall ein, daß man, nach bewirkter Subtraction und Hinzuziehung einer neuen Ziffer, eine kleinere Zahl erhielt, als der Divisor selbst ist. Man schreibt alsdann im Quotientenwerth eine 0, und nimmt aus dem Dividenden die folgende Ziffer herunter. Sollte sich die Division alsdann noch nicht ausführen lassen, so wird die nächste Ordnung des Quotientenwerthes wiederum durch eine 0 ausgefüllt u. s. w.; z. B.:

267	1356360801	5080003
	1335.....	
	2136....	
	2136....	
	0801	
	801	
	0	

6) Ist der Divisor eine 10, oder eine Potenz von 10, z. B. 100, 1000, 10000 u. s. w., so schneide man im Dividenden so viele Ziffern von der Rechten zur Linken ab, als der Divisor Nullen hat; hierauf dividire man die abgeschnittenen Ziffern durch den Divisor, und verbinde den erhaltenen Quotienten mit den übrigen Ziffern des Dividenden; z. B.:

7) $1898 : 10 = 189\frac{8}{10}$.
8) $90075 : 1000 = 90_{1}\frac{75}{000}$.
9) $4037651 : 17 = 237508\frac{15}{17}$.
10) $70053 : 300 = 233\frac{153}{300}$.
11) $80223781 : 93 = 862621\frac{88}{93}$.
12) $91387602 : 1025 = 89158_{10}\frac{852}{1025}$.
13) $10874297 : 38761 = 280\frac{1417}{3761}$.

Anmerkung:

Die Probe für die Richtigkeit der Rechnung besteht bei der Division in der Anwendung des Grundgesetzes $\frac{a}{b} . b = a$, d. h. man multiplicire den erhaltenen Quotientenwerth mit dem Divisor, so muß, bei richtiger Rechnung, der Dividend wieder herauskommen; z. B.:

No. 4. $(477 + \frac{155}{485}) . 485$ soll sein $= 231500$

$477 . 485 + \frac{155}{485} . 485 = 477 . 485 + 155 = 231500.$

§. 43. Betrachtung der Quotientenformen $\frac{a}{0}$ und $\frac{0}{0}$.

Setzt man $\frac{a}{0} = x$, so muß der Quotienten-Erklärung zufolge $a = 0 . x$ sein. Nun giebt aber $0 . x$, nach §. 34. 18, für jeden Werth von x stets 0, und nie a, woraus folgt, daß der Form $\frac{a}{0}$ kein Zahlenwerth entspricht. Setzt man ferner $\frac{0}{0} = x$, so ist die Gleichung $0 = 0 . x$ für jeden Werth von x richtig, und das Zeichen $\frac{0}{0}$ hat deshalb keine bestimmte Bedeutung.

Insofern also ein Quotient eine bestimmte Bedeutung (Zahlenwerth) haben soll, so ist zunächst festzusetzen, daß sein Divisor nie Null sein darf. Aus obigem Grunde sind nun auch die Quotienten $\frac{a}{0}$ und $\frac{0}{0}$ als ungeeignet für das Rechnen zu betrachten, wovon sich der Anfänger augenscheinlich überzeugen kann, wenn er z. B. die richtige Gleichung $99.0 = 3.0$ durch 0 dividirt. Man erhält alsdann $\frac{3.0}{0} = \frac{99.0}{0}$ und demnächst $3 = 99$. (§. 39. II.). Dieser Widerspruch zeigt daher zur Genüge, daß man durch Null nicht dividiren darf.

§. 44. Gebrauch der Klammern bei Quotienten.

Jeder Quotient in der Schreibart $\frac{a}{b}$, $\frac{1}{1-a}$, $\frac{a-b}{c}$,

$\frac{a-b}{c+d}$ bedarf der Klammern nicht, insofern bei dieser Form kein Mißverständniß zu befürchten ist. Dagegen muß man a : b in Klammern schließen, wenn dieser Quotient mit andern Ausdrücken in Verbindung kommt, z. B. in a:b+c und daher schreiben (a:b)+c, weil die erstere Schreibart auch a:(b+c) gedeutet werden könnte. Eben so müssen Klammern angebracht werden in: 1:(1—a), (a—b):c, (a—b):(c+d) u. s. w.

III. Die Multiplication und Division in Verbindung.

§. 45. Wenn Producte und Quotienten mit der einfachen Zahl durch Multiplication und Division verbunden und demnächst umgeformt werden sollen, so können überhaupt folgende Aufgaben gestellt werden:

* Product × Zahl; $ab \cdot c = ?$
1) Product : Zahl; $ab : c = ?$
2) Quotient × Zahl; $\frac{a}{b} \cdot c = ?$
3) Quotient : Zahl; $\frac{a}{b} : c = ?$
* Zahl × Product; $a(bc) = ?$
4) Zahl : Product; $a:(bc) = ?$
5) Zahl × Quotient: $a \cdot \frac{b}{c} = ?$
6) Zahl : Quotient; $a : \frac{b}{c} = ?$

Die Auflösung der mit einem Sternchen versehenen Aufgaben ist in dem Grundgesetz II. §. 32 enthalten. Die Beantwortung der Fragen 1 bis 6 aber ergiebt sich sogleich, wenn man in der Gleichung VII §. 22 und A. §. 27 überall multiplicirt, wo die Addition, und dividirt, wo die Subtraction angezeigt ist.

Man erhält daher aus der Gleichung A. §. 27, und aus VII. §. 22, v. d. R. z. L. gelesen:

N. 1. N. 2. N. 5. N. 6.

I. $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} . b = a . \frac{b}{c} = a : \frac{c}{b}$.

In Worten: „Ein Product wird durch eine Zahl dividirt, indem man:

einen der Factoren, gleichviel welchen, durch diese Zahl dividirt, und den erhaltenen Quotienten wiederum mit dem andern Factor multiplicirt", oder:

„indem man diese Zahl durch einen der Factoren dividirt und durch diesen Quotienten wiederum den andern Factor."

N. 3. N. 3. N. 4.

II. $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b = \frac{a}{bc}$.

In Worten: „Ein Quotient wird durch eine Zahl dividirt, indem man entweder:

den Dividenden durch diese Zahl dividirt, den Divisor aber als solchen beibehält", oder auch:

„indem man den Divisor mit dieser Zahl multiplicirt und den Dividenden als solchen beibehält".

Beweise. Die Richtigkeit der Gleichung N. 1 zu N. 2 zu N. 5 ergiebt sich sogleich, wenn man mit c multiplicirt. Man erhält:

$$\frac{ab}{c} . c = \frac{a}{c} . c . b = a . \frac{b}{c} . c$$

$$ab = ab = ab.$$ §. 39. I.

Um nun aber auch zu beweisen, daß N. 5 = N. 6, so multiplicire man auf beiden Seiten der Gleichung mit $\frac{c}{b}$, alsdann ist:

$$a . \frac{b}{c} . \frac{c}{b} = a$$

$$a . \frac{1 . b}{c} . \frac{c}{b} = a$$

$$a . \frac{1}{c} . b . \frac{c}{b} = a$$

$$a . \frac{1}{c} . c = a$$

$$a = a.$$

Es ist daher bewiesen, daß N. 1 = N. 2 = N. 5 = N. 6.

ad II. Man multiplicire mit bc, so wird:

$$\left(\frac{a}{b}:c\right).bc = \left(\frac{a}{c}:b\right)bc = \frac{a}{bc}.bc$$

$$\left[\left(\frac{a}{b}:c\right)c\right]b = \left[\left(\frac{a}{c}:b\right)b\right]c = a$$

$$\frac{a}{b}.b = \frac{a}{c}.c = a \text{ (§. 39. I.)}$$

$$a = a = a.$$

Analytische Herleitung der Gleichung I.

1) $\frac{a}{c}.b = x$, mit c multiplicirt, giebt:

$\frac{a}{c}.c.b = xc$

$ab = xc$, durch c dividirt, giebt:

$\frac{ab}{c} = x.$

N. 2 N. 1.

Folglich ist: $\frac{a}{c}.b = \frac{ab}{c}.$

2) $\frac{a}{c}.b = x$, mit c multiplicirt, giebt:

$ab = xc$, durch a dividirt:

$b = \frac{xc}{a} = \frac{1.xc}{a} = \frac{1}{a}.xc$ (nach N. 2), daher:

$b = \frac{1}{a}.xc$, durch c dividirt, giebt:

$\frac{b}{c} = \frac{1}{a}.x$, mit a multiplicirt:

$a.\frac{b}{c} = x.$

N. 2. N. 5. N. 1.

Folglich ist: $\frac{a}{c}.b = a.\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}.$

3) $\frac{a}{c}.b = x$, mit c multiplicirt:

$ab = xc$, durch b dividirt:

$a = x.\frac{c}{b}$, durch $\frac{c}{b}$ dividirt:

$a:\frac{c}{b} = x.$

Folglich ist: $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c}.b = a.\frac{b}{c} = a:\frac{c}{b}.$

Zur eigenen Uebung überlassen wir dem Anfänger die Herleitung der Gleichung II.

Bemerkungen:

1) Das Geſetz II kann bei der Diviſion numeriſcher Zahlen mit Vortheil in Anwendung gebracht werden, wenn ſich der Diviſor in Factoren zerlegen läßt, z. B.:

$$\frac{1344}{24} = \frac{1344}{3.8} = \frac{1344}{3} : 8 = 448 : 8 = 56.$$

2) Mittelſt der Gleichungen I und II laſſen ſich nun auch alle Aufgaben der Bruchrechnung, wo ganze Zahlen und Brüche mit einander multiplicirt oder durch einander dividirt werden ſollen, auflöſen, ſo z. B. lehrt:

N. 3 zu N. 4, wie ein Bruch*) durch eine ganze Zahl dividirt werden kann.

N. 2 zu 1 zu 6, wie ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden kann.

N. 5 zu 6, wie eine ganze Zahl mit einem Bruche multiplicirt und

N. 6 zu 5, wie eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt werden kann u. ſ. w.

Von der Anwendung der obigen Geſetze auf Brüche werden wir jedoch ſpäter ſpeciell ſprechen.

§. 46. Verbindet man Producte und Quotienten durch Multiplication und Diviſion unter ſich, ſo treten folgende Fälle als beſonders wichtig hervor:

N. 7) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

In Worten: „Zwei Quotienten werden mit einander multiplicirt, wenn man das Product der Dividenden durch das Product der Diviſoren dividirt.“

N. 8) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a:c}{b:d}$ oder auch $= \frac{ad}{bc}$.

In Worten: „Zwei Quotienten werden durch einander dividirt, indem man entweder:

1) ſowohl die Dividenden als auch die Diviſoren durch einander dividirt“; oder auch:

---

*) Ein Bruch iſt eine angezeigte Diviſion, welche keine ganze Zahl giebt, als z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$; dagegen ſind: $\frac{4}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{5}$ keine Brüche, ſondern Quotienten, für welche auch die ganzen Zahlen: 2, 4, 3 geſetzt werden können.

2) „indem man den Divisor-Quotienten umkehrt und alsdann multiplicirt."

Diese Gesetze lehren gleichzeitig, wie zwei Brüche mit einander multiplicirt, oder durch einander dividirt werden.

Beweise:

ad 7) Es soll sein: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Man multiplicire mit bd,

so ist: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot b.d = ac$, oder nach §. 32 I. u. II,

$$\frac{a}{b} . b . \frac{c}{d} . d = ac$$

$$ac = ac.$$

ad 8) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a:c}{b:d}$. Man multiplicire mit $\frac{b}{d}$ und

schreibe: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$

$$\frac{\frac{a}{b} . b}{\frac{c}{d} . d} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{c};$$

oder auch: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$. Man multiplicire mit bc, so ist:

N. 6 zu N. 5.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} . bc = ad.$$

$$\frac{a}{b} . b . \frac{d}{c} . c = ad.$$

$$ad = ad.$$

§. 47.

N. 9) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{a:c}{b:c}$.

In Worten: „Ein Quotient bleibt dem Werthe nach unverändert, wenn man den Divisor und Dividend mit einer und derselben Zahl multiplicirt, oder durch dieselbe dividirt."

Beweis: Man multiplicire mit $\frac{b}{c}$, so ist:

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{ac}{bc} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$$

nach N. 7 v. d. R. z. L.

$$\frac{a}{b} . b . \frac{1}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$$

$$a . \frac{1}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} . b . \frac{1}{c} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{c} . c . \frac{1}{c} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{c} = \frac{a}{c}.$$

Anmerkung: Der erste Fall dieses Gesetzes findet in der Bruchrechnung, wenn Brüche auf gleiche Divisoren (Nenner) gebracht, und der zweite Fall, wenn Brüche vereinfacht werden sollen, seine Anwendung; z. B.:

1) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1.2}{2.2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2+3}{4} = \frac{5}{4}$. §. 39. IV. I.

2) $\frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} = \frac{10}{15}$;

oder 2ter Fall:

3) $\frac{abd}{bcd} = \frac{a}{c}$; man hat im Zähler und Nenner durch bd gehoben oder dividirt.

4) $\frac{8}{24} = \frac{8:8}{24:8} = \frac{1}{3}$.

5) $\frac{990}{11} = \frac{990:11}{11:11} = \frac{90}{1} = 90$.

Drittes Kapitel.

Von den vorzüglichsten Eigenschaften der numerischen Zahlen.

Theiler. — Vielfaches. — Gemeinschaftliches Vielfache. — Kleinstes gemeinschaftliches Vielfache. — Primzahl. — Zusammengesetzte Zahl. — Primzahlen unter sich. — Gemeinschaftlicher Theiler. — Größter gemeinschaftlicher Theiler. — Gerade Zahl. — Ungerade Zahl.

§. 48. Erklärungen.

1) Ist der Quotient zweier ganzen Zahlen $\frac{a}{b}$ einer gan-

zen Zahl gleich, und dabei größer als 1, so heißt b ein Theiler von a, und a ein Vielfaches von b, z. B. $16 : 4 = 4$, $104 : 8 = 13$. In diesem Beispiele ist 8 ein Theiler von 104, und 104 ein Vielfaches von 8.

2) Ist eine Zahl A durch mehrere andere Zahlen m, n, p, q ꝛc. ohne Rest theilbar, so wird sie ein gemeinschaftliches Vielfaches dieser Zahlen genannt, und ist sie dabei zugleich die kleinste in dieser Art, so heißt sie das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen m, n, p, q. So z. B. ist 40 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 2, 4, 5, 8, 10, 20.

3) Jede ganze Zahl, welche nur durch 1 und durch sich selbst ohne Rest theilbar ist, heißt eine Primzahl (absolute Primzahl). Jede Zahl, welche keine Primzahl ist, wird dagegen eine zusammengesetzte Zahl genannt.

Die Primzahlen, welche in den ersten 100 Zahlen vorkommen, sind:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Haben zwei oder mehrere Zahlen keinen gemeinschaftlichen Theiler außer 1, so heißen diese Zahlen „Primzahlen unter sich" (relative Primzahlen), z. B.:

3, 7 und 8 oder: 9, 14 und 25 u. dgl. m.

4) Theilt eine Zahl a mehrere andere Zahlen A, B, C, D u. s. w. ohne Rest, so nennt man sie den gemeinschaftlichen Theiler dieser Zahlen, und giebt es außer a keine größere Zahl, welche A, B, C und D theilt, so heißt a der größte gemeinschaftliche Theiler. So ist z. B. 4 der größte gemeinschaftliche Theiler von 20, 88 und 12.

5) Jede durch 2 ohne Rest theilbare, ganze Zahl heißt eine gerade, jede andere dagegen eine ungerade Zahl. Jede gerade Zahl wird allgemein durch $2n$ und jede ungerade durch $2n + 1$ ausgedrückt. So sind 2, 4, 6, 8, 10, 12 u. s. w. gerade, 1, 3, 5, 7, 9, 11 u. s. w. ungerade Zahlen.

§. 49. Aufgabe. Man soll eine zusammengesetzte Zahl in ihre einfachen Faktoren (Primzahlen) zerlegen oder zerfällen.

Auflösung: Man dividire die gegebene zusammengesetzte Zahl

durch die kleinste Primzahl, welche ein Theiler derselben ist, das was herauskommt dividire man aufs Neue durch eine solche Primzahl und wiederhole dieses Verfahren so lange, bis der letzte Quotient selbst eine Primzahl giebt. Sämmtliche Divisoren und der letzte Quotientenwerth sind alsdann die einfachen Factoren der gegebenen zusammengesetzten Zahl. So z. B. ist:

$360 = 2(360:2) = 2.180 = 2.2.(180:2) = 2.2.90 = 2.2.2(90:2)$
$= 2.2.2.45 = 2.2.2.3.(45:3) = 2.2.2.3.15$
$= 2.2.2.3.3.(15:3) = 2.2.2.3.3.5.$
$1197 = 3.3.7.19.$
$10380 = 2.2.3.5.173.$

§. 50. Aufgabe. Man soll das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen a, b und c finden.

Auflösung: Man zerfälle zunächst eine der gegebenen Zahlen, etwa a, in ihre einfachen Factoren, nehme hierzu die einfachen Factoren von b, welche in a nicht vorkommen und zu diesem Product wiederum die einfachen Factoren von c, welche in a und b nicht enthalten sind. Das Product dieser einfachen Factoren giebt das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache. Hiernach erhält man z. B. als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches der Zahlen: 15, 10, 9, 8, 6, das Product: $3.5.2.3.2.2 = 360.$

Beweis: Das Product 2.2.2.3.3.5 ist zunächst ein gemeinschaftliches Vielfaches der Zahlen 15, 10, 9, 8 und 6; es ist aber auch dieses Product das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, weil die Division dieser Zahlen in das gebildete Vielfache relative Primzahlen giebt, nämlich: 2.2.2.3, 2.2.3.3, 2.2.2.5, 3.3.5 und 2.2.3.5. Diese Producte haben aber keinen gemeinschaftlichen Factor mehr, und es war daher: 2.2.2.3.3.5 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 15, 10, 9, 8, 6.

Zuweilen bewerkstelligt man auch die Auflösung der vorstehenden Aufgabe nach folgendem Schema:

Divisoren.		
2	15, 10, 9, 8, 6	
2	15, 5, 9, 4, 3	
3	15, 5, 9, 2, 3	
5	5, 5, 3, 2, 1	
	1, 1, 3, 2,	

$2.2.2.3.3.5 = 360.$

Man dividirt nämlich zuerst mit 2 in diejenigen Zahlen, welche ein Vielfaches von 2 sind; hierauf mit 3 in diejenigen Zahlen, welche ein Vielfaches von 3 sind, und setzt diese Division so lange fort, bis die zuletzt übrig gebliebenen Quotientenwerthe selbst als Primzahlen erscheinen.

Hiernach findet man ferner:

1) 72 als kleinst. gemeinsch. Vielfaches von: 6, 8, 9, 12, 18.
2) 660 " " " " 4, 5, 11, 66.
3) 3564 " " 36, 66, 81, 108, 396, 1782.
4) 39600 " " " 12, 66, 100, 22, 176, 18.
5) 794561 " " " 11191, 2201, 1349.
6) 214375 " " " 245, 625, 875, 343, 1225.
7) $4x(2x-1)(x+1)$ " " $4x, 2x-1, 2(2x-1), x+1$.
8) $(3-x)(2x-1)2$ " " $(3-x)2, 2x-1, (2x-1)2$.
9) $(9-8x)8x$ " " " $4x, 8x, 9-8x$.
10) $5.5.7.abc(5a-b)$ " $b, 5b, 25bc, 5a-b, 35ab, 7a$.
11) $12bgh$ " " " $4bg, 12bh, 3, 4h$.
12) $24b^2c^2$ " " " $3bc, 8b^2c, 6b^2c^2$.

§. 51. Aufgabe. Zu zwei gegebenen Zahlen den größten gemeinschaftlichen Theiler zu finden.

Auflösung: Man nehme die gemeinschaftlichen einfachen Factoren dieser Zahlen, so giebt ihr Product den gesuchten *größten gemeinschaftlichen Theiler.*

Beispiel: Welche Zahl ist von 48 und 60 der größte gemeinschaftliche Theiler?

2	48, 60
2	24, 30
3	12, 15
	4, 5

Die gemeinschaftlichen einfachen Factoren der Zahlen 48 und 60 sind also: 2, 2, 3 und das Product $2.2.3 = 12$ ist ihr größter gemeinschaftlicher Theiler.

Beweis: 12 ist zunächst ein Theiler von 48 und 60, es ist aber auch 12 der größte Theiler von 48 und 60, weil die Quotienten $\frac{48}{12}$ und $\frac{60}{12}$ die relativen Primzahlen 4 und 5 geben.

Hiernach findet man ferner zu den Zahlen:

1) 6019 und 2613 den größten gemeinschaftlichen Theiler = 13.
2) 585 " 936 " " " " = 117.
3) 408 " 1680 " " " " = 24.
4) 3108 " 1369 " " " " = 37.
5) 15096 " 6253 " " " " = 37.
6) 2680 " 12127 " " " " = 67.

7)	1751	und	10197	den	größten	gemeinschaftlichen	Theiler	= 103.
8)	7913	„	16984	„	„	„	„	= 193.
9)	2321	„	19623	„	„	„	„	= 211.
10)	12320	„	3718	„	„	„	„	= 22.
11)	494150	„	494200	„	„	„	„	= 50.
12)	29165	„	64885	„	„	„	„	= 95.

§. 52. Die vorstehende Aufgabe läßt sich noch auf eine andere Art lösen, und zwar wie folgt:

Man dividire die größere Zahl durch die kleinere, hierauf den Divisor durch den Rest, sodann den ersten Rest durch den zweiten Rest, und so fort, bis die Division aufgeht. Der letzte Divisor ist alsdann der größte gemeinschaftliche Theiler, z. B.:

```
48 | 60 | 1
   | 48 |
   -----
    12 | 48 | 4
       | 48 |
       -----
         0
```

Beispiele:

1) Welche Zahl ist der größte gemeinschaftliche Theiler zu 345 und 456? Antw.: 3.

```
345 | 456 | 1
    | 345 |
    -----
    111 | 345 | 3
        | 333 |
        -----
         12 | 111 | 9
            | 108 |
            -----
              3 | 12 | 4
                | 12 |
                -----
                  0
```

2) Welche Zahl ist der größte gemeinschaftliche Theiler zu 211 und 346?

```
211 | 346 | 1
    | 211 |
    -----
    135 | 211 | 1
        | 135 |
        -----
         76 | 135 | 1
            | 76 |
            -----
             59 | 76 | 1
                | 59 |
                -----
                17 | 59 | 3
                   | 51 |
                   -----
                    8 | 17 | 2
                      | 16 |
                      -----
                        1 | 8 | 8
                          | 8 |
                          -----
                            0
```

Antw.: Weil die gegebenen Zahlen nur durch 1 theilbar, so sind dieselben Primzahlen unter sich.

§. 53. Aufgabe. Man soll den größten gemeinschaftlichen Theiler mehrerer Zahlen finden.

Auflösung: Sind die Zahlen a, b, c und d gegeben, so suche man zunächst den größten gemeinschaftlichen Theiler von a und b; er sei = x, hierauf von x und c; er sei = y, und demnächst von y und d; er sei = z. Die Zahl z ist alsdann der größte gemeinschaftliche Theiler von a, b, c und d.

Hiernach findet man zu den Zahlen:

1) 48, 36, 144 den größten gemeinschaftl. Theiler = 12.
2) 594, 108, 162, 54 " " " " = 54.
3) 63, 81, 51 " " " " = 3.
4) 680, 408, 595 " " " " = 17.
5) 8281, 15379, 3523 " " " " = 13.
6) 13363, 45701, 4887477 " " " " = 23.

§. 54. Für die Zerfällung der zusammengesetzten Zahlen in ihre einfachen Factoren hat man folgende Merkmale:

1) Eine numerische Zahl ist durch 2 theilbar, wenn ihre letzte Ziffer zur Rechten durch 2 theilbar oder eine Null ist.
2) Sie ist durch 4 theilbar, wenn ihre beiden letzten Ziffern, als numerische Zahl betrachtet, durch 4 theilbar sind, oder wenn sie zur Rechten 2 Nullen hat; z. B.: 1016, 89028, 2900396, 5980, 1400.
3) Sie ist durch 8 theilbar, wenn die 3 letzten Ziffern, als numerische Zahl betrachtet, durch 8 theilbar sind, oder die Zahl mit 3 Nullen endigt, z. B.: 792, 18320, 300832, 77400, 39000, 26080.
4) Sie ist durch 5 theilbar, wenn die letzte Ziffer zur Rechten eine 5 oder 0 ist, z. B.: 9035, 92115, 630, 45400.
5) Sie ist durch 3 theilbar, wenn die Summe ihrer Ziffern durch 3 theilbar ist, z. B.: 18, 51, 39, 69, 78, 102, 111, 750, 33927.
6) Sie ist durch 6 theilbar, wenn sie durch 3 und 2 zugleich theilbar ist, z. B.: 522, 978, 6348, 9954, 830010, 66012300.
7) Sie ist durch 9 theilbar, wenn die Summe ihrer Zif-

fern durch 9 theilbar ist, z. B.: 54, 81, 801, 225, 93357, 12753.

8) Sie ist durch 10 theilbar, wenn die letzte Ziffer zur Rechten eine 0 ist.

9) Sie ist durch 11 theilbar, wenn der Differenzwerth, welchen die Summe der Ziffernwerthe in den geraden Stellen weniger der Summe der Ziffernwerthe in den ungeraden Stellen giebt, durch 11 theilbar oder $= 0$ ist.

Beweise: Es stelle .... dcba eine numerische Zahl vor, in welcher d die Tausender, c die Hunderter, b die Zehner, a die Einer und die Punkte alle übrigen Einheiten höherer Ordnung bedeuten, so ist:

ad 1) $\frac{\ldots. dcba}{2} = \frac{\ldots + d.1000 + c.100 + b.10 + a}{2} =$

$\left(\frac{\ldots + d.1000 + c.100 + b.10}{2}\right) + \frac{a}{2}.$

Nun ist $(\ldots d.10.10.10 + c.10.10 + b.10)$ durch 2 theilbar und die Theilbarkeit der ganzen Zahl hängt folglich nur davon ab, ob a ebenfalls durch 2 theilbar oder 0 ist.

ad 2) $\frac{\ldots dcba}{4} = \frac{\ldots. + d.1000 + c.100}{4} + \frac{b.10 + a}{4} =$

$\frac{\ldots d.10.10.10 + c.10.10}{2.2} + \frac{b.10 + a}{4}.$

Nun ist aber $(\ldots + d.10.10.10 + c.10.10)$ durch 4 theilbar und mithin die ganze Zahl, wenn auch der numerische Zahlenwerth der zwei letzten Ziffern durch 4 theilbar ist.

ad 3) ....dcba durch 8 theilbar, wenn die Zahl cba durch 8 getheilt werden kann.

$\frac{\ldots. dcba}{8} = \left(\frac{\ldots + d.1000}{8}\right) + \frac{(c.100 + b.10 + a)}{8} =$

$\frac{\ldots d.10.100}{2.4} + \frac{c.100 + b.10 + a}{8}.$

Nun ist $(\ldots + d.1000)$ durch 8 wirklich theilbar, mithin die ganze Zahl, wenn auch cba durch 8 getheilt werden kann.

ad 4) $\frac{\ldots. dcba}{5} = \frac{\ldots d.1000 + c.100 + b.10}{5} + \frac{a}{5}.$

Es ist also die ganze Zahl durch 5 theilbar, wenn $a = 5$ oder $= 0$ ist.

ad 5) $\frac{\ldots dcba}{3} = \frac{\ldots + d.1000 + c.100 + b.10 + a}{3}$

$= \frac{\ldots + d.999 + d + c.99 + c + b.9 + b + a}{3}$

$= \frac{\ldots + 999d + 99c + 9b}{3} + \frac{\ldots + d + c + b + a}{3}.$

Nun ist aber $\ldots + 999d + 99c + 9b$ durch 3 theilbar, mithin auch die ganze Zahl, wenn die Summe der Ziffern $d + c + b + a$ durch 3 theilbar ist.

ad 6) $\frac{..dcba}{6} = \frac{..dcba}{2.3} = \frac{(.. + 999d + 99c + 9b) + (.. + d + c + b + a)}{3} : 2$

Nun ist aber diese Zahl nach No. 5 durch 3 theilbar, wenn $d + c + b + a$ durch 3 getheilt werden kann, aber auch durch 2, wenn a eine gerade Zahl oder 0 ist.

ad 7) $\frac{\ldots dcba}{9} = \frac{\ldots + 999d + 99c + 9b}{9} + \frac{\ldots + d + c + b + a}{9}$

Nun ist aber $\ldots + 999d + 99c + 9b$ durch 9 theilbar, folglich die ganze Zahl, wenn $\ldots + d + c + b + a$ ebenfalls durch 9 theilbar ist.

ad 8) $\frac{\ldots dcba}{10} = \frac{\ldots + d.1000 + c.100 + b.10}{10} + \frac{a}{10}.$

ad 9) $\ldots dcba$ durch 11 theilbar, wenn $(\ldots + c + a) - (\ldots + d + b)$ oder $-[(\ldots + d + b) - (\ldots + c + a)]$ durch 11 theilbar ist, oder 0 giebt. Man drücke die Zahl $\ldots dcba$ wiederum als Summe aus:

$\ldots + d.1000 + c.100 + b.10 + a =$

$\ldots + d.990 + d.10 + c.99 + c + b.10 + a =$

$(\ldots + d.990 + c.99) + (\ldots + d.10 + b.10 + c + a) =$

$(\ldots + d.990 + c.99) + (\ldots + d.11 - d + b.11 - b + c + a) =$

$(\ldots d.90 + c.9)11 + (\ldots + d + b)11 + (\ldots + c + a) - (\ldots + d + b).$

Nun sind aber die beiden ersten Summanden durch 11 theilbar, mithin auch die ganze Zahl, wenn die Differenz aus der Summe der Ziffernwerthe der geraden und ungeraden Stellen, durch 11 theilbar oder = 0 ist, z. B.: 585032118; hier beträgt die Summe der Ziffernwerthe in den ungeraden Stellen 22 und in den geraden 11 und man findet daher den Differenzwerth 11, weshalb die gegebene Zahl durch 11 theilbar ist.

Noch andere Beispiele geben die Zahlen: 143, 242, 198, 209, 748, 869, 3091, 5797, 230846, 9390409155149.

§. 55. Fragen und Antworten:

1) Was versteht man unter einem Product?
Antw.: Ein Zeichen von der Form a.b. §. 32.
2) Was bezeichnet ein Product?

Antw.: Die Zahl, welche entſteht, wenn man den einen Factor ſo oft zu ſich ſelbſt addirt, als der andere Einheiten enthält.

3) Welche Grundgeſetze gelten für die Multiplication? §. 32. I. u. II.

4) Wie heißen die Geſetze, nach welchen Summen und Differenzen multiplicirt werden? §. 32. IV nnd V.

5) Welchen Sinn haben dieſe Geſetze, wenn man ſie von der Rechten zur Linken lieſt? §. 32.

6) Wenn man eine zweitheilige Summe mit ſich ſelbſt multiplicirt, was erhält man alsdann? §. 34. 17.

7) Wenn man die Summe zweier Zahlen mit der Differenz dieſer Zahlen multiplicirt, was erhält man alsdann? §. 34. 10.

8) Wie multiplicirt man numeriſche Zahlen auf die kürzeſte Weiſe mit einander? §. 36.

9) Wenn muß man bei Producten nothwendig Klammern gebrauchen? Antw.: §. 37.

10) Was verſteht man unter einem Quotienten?

Antw.: Einen Ausdruck von der Form $\frac{a}{b}$. §. 38.

11) Was bedeutet ein ſolcher Ausdruck?

Antw.: Die Zahl, welche, mit dem Diviſor multiplicirt, den Dividenden giebt.

12) Welche Grundgeſetze drücken den Gegenſatz der Multiplication und Diviſion am augenſcheinlichſten aus? §. 39. I und II.

13) Wie heißt das allgemeinere Diviſionsgeſetz? §. 39. IV.

14) Was lehrt das ſpeciellere Diviſionsgeſetz? §. 39. V.

15) Wo wendet man das letztere gewöhnlich an, und auf welche Weiſe? §. 41.

16) Wie wird ein Product durch eine Zahl dividirt? §. 45. I.

17) Wie wird ein Quotient durch eine Zahl dividirt? §. 45. II.

18) Wie wird ein Quotient mit einer Zahl multiplicirt? §. 45. I.

19) Wie werden zwei Quotienten mit einander multiplicirt? §. 46. 7.

20) Wie werden zwei Quotienten durch einander dividirt? §. 46. 8.

21) In welchem Falle bleibt der Werth eines Quotienten beim Umformen nur allein unverändert? §. 47. 9.

22) Wo kommt dieſes Geſetz hauptſächlich in Anwendung? §. 47.

23) Was verſteht man unter einem Theiler und unter einem Vielfachen? §. 48. 1.

24) Was verſteht man unter einem gemeinſchaftlichen Vielfachen mehrerer Zahlen, und wenn wird daſſelbe das kleinſte genannt? §. 48. 2.

25) Was iſt eine Primzahl, und wie nennt man die Zahlen, welche nicht Primzahlen ſind? §. 48. 3.

26) Was verſteht man unter dem gemeinſchaftlichen Theiler mehrerer Zahlen, und in welchem Falle wird derſelbe der größte genannt? §. 48. 4.

27) Welche Zahlen nennt man gerade, und welche ungerade? §. 48. 5.
28) Wie wird eine zusammengesetzte Zahl in ihre Primzahlen (einfachen Factoren) aufgelöst? §. 49.
29) Wie findet man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen? §. 50.
30) Wie findet man zu zwei oder mehreren gegebenen Zahlen den größten gemeinschaftlichen Theiler? §. 51 bis 53.
31) Welche Kennzeichen giebt es für die Theilbarkeit der numerischen Zahlen? §. 54.

II. Abschnitt.

Von den vier Elementar-Operationen mit Brüchen.

Viertes Kapitel.

Von den gewöhnlichen Brüchen.

§. 56. *Erklärungen.*

1) Ein Bruch ist eine angezeigte Division zweier ganzen, absoluten Zahlen, welche zu keiner ganzen Zahl führt, so daß auch mit Brüchen nur nach denselben Gesetzen gerechnet werden kann, welche bereits für die Quotienten hingestellt wurden.

Der Divisor eines Bruches wird gewöhnlich der Nenner, und der Dividend der Zähler desselben genannt.

2) Ein Bruch heißt ächt, wenn der Nenner größer als der Zähler, und unächt, wenn der Nenner kleiner als der Zähler ist. Hiernach sind: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$ ächte, und $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{9}{8}$ unächte Brüche.

3) Besteht eine Summe oder Differenz aus einer ganzen Zahl und einem Bruch, wie z. B. in $a + \frac{b}{c}$ oder $a - \frac{b}{c}$, so heißt ein solcher Ausdruck eine gemischte Zahl.

4) Ist der Zähler und Nenner eines Bruches selbst ein

Bruch, so nennt man denselben einen Bruchsbruch; zum Beispiel: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$.

5) Ist der Nenner eines Bruches die Zahl 10, oder besteht derselbe aus einer Potenz von 10, so heißt er insbesondere ein Dezimalbruch. Jeder andere Bruch wird alsdann zum Unterschiede von den Dezimalbrüchen ein gewöhnlicher oder auch gemeiner Bruch genannt.

6) Ein Bruch heißt reducirt (in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt), wenn der Zähler und Nenner desselben relative Primzahlen sind, oder, was dasselbe sagt, wenn der Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Factor haben.

7) Brüche von gleichen Nennern werden auch gleichnamige genannt, und man sagt, wenn ungleichnamige Brüche gleichnamig gemacht werden, man bringt sie auf gleiche Benennung.

§. 57. Aufgabe. Man soll Brüche reduciren.

Auflösung: 1) Man beurtheile aus den im §. 54. angegebenen Merkmalen, ob der Zähler und Nenner einen und denselben Theiler haben. Ist dies der Fall, so hebe (dividire) man den Zähler und Nenner des Bruches durch diesen Theiler, und wiederhole dieses Verfahren so lange, bis man auf einen reducirten Bruch stößt, z. B.:

$$\frac{1680}{2688}=\frac{1680:4}{2688:4}=\frac{420:2}{672:2}=\frac{210:2}{336:2}=\frac{105:3}{168:3}=\frac{35:7}{56:7}=\frac{5}{8},$$

oder: 2) Man zerfälle Zähler und Nenner, nach §. 45 in ihre einfachen Factoren, und dividire alsdann durch die gemeinschaftlichen Factoren (§. 47. 9), z. B.:

$$\frac{360}{10380}=\frac{2.2.2.3.3.5}{2.2.3.5.173}=\frac{6}{173},$$

oder: 3) Man suche nach §. 51 und 52 den größten gemeinschaftlichen Theiler zum Zähler und Nenner und hebe den Bruch durch denselben, z. B.:

$$\frac{1680}{2688}=\frac{1680:336}{2688:336}=\frac{5}{8}.$$

§. 58. Aufgabe. Man ſoll eine gemiſchte Zahl in einen unächten Bruch verwandeln, oder, was daſſelbe ſagt, man ſoll die ganze Zahl unter den Bruch bringen.

Auflöſung: Man hat $a \pm \frac{b}{c} = \frac{ac \pm b}{c}$.

Beweis: $\left(a \pm \frac{b}{c}\right) c = \frac{ac \pm b}{c} . c$

(§. 32. IV und V.)

$$ac \pm \frac{b}{c} . c = ac \pm b \quad (§. 39. I.)$$

$$ac \pm b = ac \pm b^{*})$$

In Worten: „Ein Bruch wird zu einer ganzen Zahl addirt, wenn man das Product des Nenners und der ganzen Zahl zum Zähler addirt, und die erhaltene Summe wiederum durch den Nenner dividirt."

Beiſpiele:

1) $5 + \frac{3}{4} = \frac{5.4+3}{4} = \frac{20+3}{4} = \frac{23}{4}$.

2) $5 - \frac{3}{4} = \frac{5.4-3}{4} = \frac{20-3}{4} = \frac{17}{4}$.

3) $\frac{1}{2} + 7 = \frac{1+2.7}{2} = \frac{1+14}{2} = \frac{15}{2}$.

§. 27. A. N. 3 zu N. 4.

4) $\frac{1}{2} - 8 = \frac{1-2.8}{2} = \frac{1-16}{2} = \frac{-(16-1)}{2} = \frac{-15}{2} = -\frac{15}{2}$. §. 40. 4.

5) $(a+b) + \frac{a}{b} = \frac{(a+b)b+a}{b} = \frac{a+ab+b^2}{b}$.

6) $m - \left(n + \frac{m}{n}\right) = -\left[\frac{(n^2+m)-mn}{n}\right]$.

7) $m - n + \frac{m}{n} = \frac{(m-n)n+m}{n}$.

§. 59. Aufgabe. Man ſoll einen unächten Bruch in eine gemiſchte Zahl umformen.

---

*) Schreibt man $\pm a$, ſo gilt beim Rechnen entweder das $+$ oder das $-$ Zeichen, aber nicht beide Zeichen zugleich.

Auflösung: Man wende das speciellere Divisionsgesetz an; z. B.: $\frac{23}{4} = 5 + \frac{23-20}{4} = 5 + \frac{3}{4} = 5\frac{3}{4}$.

§. 60. Aufgabe. Man soll Brüche addiren oder von einander subtrahiren.

Auflösung: 1ster Fall. Haben die Brüche gleiche Nenner, so addire oder subtrahire man ihre Zähler nach den Gesetzen: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$, oder: $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$.

Beispiele:

1) $\frac{5}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$.

2) $\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2}$.

3) $\frac{3}{5} + \frac{8}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3+8+1}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$.

4) $\frac{7}{3} - \frac{4}{3} - \frac{3}{3} = \frac{7-(4+3)}{3} = \frac{7-7}{3} = \frac{0}{3} = 0$. (§. 40. 3.)

2ter Fall. Sind zwei Brüche von ungleichen Nennern zu addiren, so bringe man sie zunächst auf gleiche Benennung, indem man den Zähler und Nenner eines jeden Bruchs mit dem Nenner des andern Bruchs multiplicirt; z. B.:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$ (§. 47. N. 9).

Hierauf addirt man wie im 1sten Falle, daher:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Beispiele:

1) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$.

2) $\frac{3}{5} + \frac{8}{3} = \frac{9+40}{15} = \frac{49}{15} = 3\frac{4}{15}$.

3) $\frac{4}{7} + \frac{9}{4} = \frac{4}{7} + \frac{1}{4} + 2 = \frac{16+7}{28} + 2 = 2\frac{23}{28}$.

4) $\frac{4}{5} + \frac{6}{5} + \frac{3}{4} = \frac{10}{5} + \frac{3}{4} = 2\frac{3}{4}$.

5) $\frac{a}{3} - \frac{a-b}{3} - \frac{2a+b}{3} = \frac{a-(a-b)}{3} - \frac{2a+b}{3} =$
$\frac{a-(a-b)-(2a+b)}{3} = \frac{a+(b-a)-2a-b}{3} = -\frac{2a}{3}$.

6) $\frac{b+ab}{2b} - \frac{2ab-b}{2b} = \frac{(1+a)b}{2b} - \frac{(2a-1)b}{2b} = \frac{1+a+1-2a}{2} = \frac{2-a}{2}$.

Auf ähnliche Weise ist zu verfahren, wenn man zwei Brüche von einander subtrahiren soll;

7) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$.

8) $\frac{7}{6} - \frac{5}{8} = \frac{56-30}{48} = \frac{26}{48} = \frac{26:2}{48:2} = \frac{13}{24}$.

9) $\frac{5}{8} - \frac{7}{6} = \frac{30-56}{48} = \frac{-(56-30)}{48} = \frac{-26}{48} = \frac{-13}{24} = -\frac{13}{24}$.

§. 40. 4.

3ter Fall. Sind mehr als zwei Brüche von verschiedenen Nennern zu addiren, so multiplicire man den Zähler und den Nenner eines jeden Bruchs mit dem Producte der übrigen Nenner, z. B.:

1) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf}{bdf} + \frac{cbf}{bdf} + \frac{ebd}{bdf} = \frac{adf+cbf+ebd}{bdf}$.

Nach dieser Formel ist ferner:

2) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{1.3.4+2.2.4+2.3.3}{2.3.4} = \frac{12+16+18}{24} = \frac{(12+16+18):2}{24:2} = \frac{6+8+9}{12} = \frac{23}{12} = 1\frac{11}{12}$.

4ter Fall. Will man jedoch die zu addirenden Brüche mit gleichen Nennern dergestalt erhalten, daß die Zähler und Nenner der einzelnen Brüche keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben, so bilde man zunächst von sämmtlichen Nennern das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (§. 50).

Dieses kleinste gemeinschaftliche Vielfache wird der General-Nenner genannt.

Hierauf dividire man den General-Nenner nach und nach durch jeden Nenner der zu addirenden Brüche und multiplicire mit dem, was herauskommt, den Zähler und Nenner desjenigen Bruchs, mit dessen Nenner man in den General-Nenner dividirt hat. Hierdurch erhalten sämmtliche Brüche, ohne Aenderung ihres Werthes, den Generalnenner zum gemeinschaftlichen Nenner.

Sollen nach dieser Regel die im Beispiele 2 gege-

benen Brüche addirt werden, so ist der Generalnenner = 12 und die Rechnung kommt, wie folgt, zu stehen:

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{4}=\frac{1.6}{2.6}+\frac{2.4}{3.4}+\frac{3.3}{4.3}=\frac{6+8+9}{12}=\tfrac{23}{12}=1\tfrac{11}{12}.$$

Die Richtigkeit des Verfahrens gründet sich auf die bei demselben in Anwendung gebrachten Gesetze (§. 47. N. 9 und §. 39. IV).

Beispiele:

1) Es sind zu addiren: $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{1}{12}+\frac{2}{5}$.

(Generalnenner $= 2.2.2.3.5 = 120$.)

$$\tfrac{5}{6}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{7}{8}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{2}{5}=\frac{5.2.2.5}{6.2.2.5}+\frac{3.2.3.5}{4.2.3.5}+\frac{7.3.5}{8.3.5}+\frac{2.5}{12.2.5}+$$

$$+\frac{2.2.2.2.3}{5.2.2.2.3}=\frac{100+90+105+10+48}{120}=\tfrac{353}{120}=2\tfrac{113}{120}.$$

Auch kann man folgenden, jedoch für die Richtigkeit des Verfahrens weniger übersichtlichen Ansatz benutzen.

	General-Nenner 120.	Quotienten-werthe.	Zähler.
Gegeb. Brüche.	$\frac{5}{6}$	20	100
	$\frac{3}{4}$	30	90
	$\frac{7}{8}$	15	105
	$\frac{1}{12}$	10	10
	$\frac{2}{5}$	24	48
$= 2\frac{113}{120}$			353 Summenwerth der Zähler;

daher: $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{1}{12}+\frac{2}{5}=\frac{353}{120}=2\frac{113}{120}$.

2) $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{3}{4}=\frac{41}{20}$.

(Generalnenner $= 2.2.3.11.17 = 2244$.)

3) $\frac{5}{102}+\frac{3}{44}+\frac{2}{187}+\frac{7}{132}=\frac{5}{2.3.17}+\frac{3}{2.2.11}+\frac{2}{11.17}+\frac{7}{2.2.3.11}$

$$=\frac{5.2.11+3.3.17+2.2.2.3+7.17}{2244}$$

$$=\frac{110+153+24+119}{2244}=\frac{406}{2244}=\frac{203}{1122}.$$

4) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{3}{8}=1\frac{7}{8}$.

5) $\frac{7}{9}+\frac{11}{12}+\frac{17}{20}=2\frac{49}{90}$.

6) $\frac{33}{16}+\frac{7}{24}+\frac{73}{60}+\frac{11}{36}=3\frac{631}{720}$.

7) $\frac{52}{25}+\frac{89}{75}+\frac{46}{45}+\frac{5}{12}=4\frac{127}{180}$.

8) $\frac{101}{144}+\frac{233}{264}+\frac{89}{64}+\frac{67}{66}=3\frac{6271}{6336}$.

9) $\frac{111}{70}+\frac{91}{154}+\frac{5}{63}+\frac{100}{99}+\frac{47}{42}=4\frac{1223}{2310}$.

10) $\frac{2103}{1728}+\frac{901}{288}+\frac{653}{432}+\frac{113}{864}+\frac{71}{144}=6\frac{277}{576}$.

11) $\frac{1003}{209} + \frac{461}{57} + \frac{79}{176} + \frac{323}{80} + \frac{101}{95} = 18\frac{5471}{12540}$.

12) Man ſoll $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{9}$ von $\frac{3}{16} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ ſubtrahiren.

(Der Generalnenner ſämmtlicher Brüche iſt $= 2.2.2.2.3.3 = 144$)

$$\frac{3}{16} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{9}\right)$$

$$= \frac{3.3.3+2.2.2.3.3+2.2.2.2.2.3-(3.2.2.3.3+2.2.2.2.3+5.2.2.2.2)}{144}$$

$$= \frac{27+72+96-(108+48+80)}{144}$$

$$= \frac{195-236}{144} = \frac{-(236-195)}{144} = \frac{-41}{144} = -\frac{41}{144}.$$

13) $\frac{5}{42} - \frac{1}{22} + \frac{3}{154} - \frac{2}{231} = \frac{5}{2.3.7} + \frac{3}{2.7.11} - \left(\frac{1}{2.11} + \frac{2}{3.7.11}\right)$

(Generalnenner $= 2.3.7.11 = 462$)

$$= \frac{5.11+3.3-(3.7+2.2)}{462} = \frac{64-25}{462}$$

$$= \frac{39}{462} = \frac{13}{154}.$$

14) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{4}{5} + \frac{7}{8} + \frac{7}{10} + \frac{11}{12} + \frac{13}{15} + \frac{17}{24} = 5\frac{19}{20}$.

15) $\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2837}{27720}$.

16) $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{241}{420}$.

§. 61. **Aufgabe.** Man ſoll gemiſchte Zahlen addiren oder ſubtrahiren.

Auflöſung: Man addire oder ſubtrahire ſowohl die Brüche, als auch die ganzen Zahlen, für ſich; z. B.:

1) $7\frac{3}{4} + 5\frac{2}{3} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} + 7 + 5 = \frac{9+8}{12} + 12 = 12 + \frac{17}{12} = 13\frac{5}{12}$.

2) $7\frac{3}{4} - 5\frac{2}{3} = 2 + \frac{9-8}{12} = 2\frac{1}{12}$.

3) $\frac{3}{5} + 3\frac{1}{2} + 4 - \frac{11}{12} - \frac{2}{9} = 6\frac{173}{180}$.

Rechnung:

Generalnenner 180	Quotientenwerthe	Zähler	
$\frac{3}{4}$	36	108	198
$3 + \frac{1}{2}$	90	90	
4			
$-1\frac{11}{12}$	15	165	-205
$-\frac{2}{9}$	20	40	
7			$\frac{-7}{180}$

Nun iſt aber: $7 + \frac{-7}{180} = 7 - \frac{7}{180} = 6 + \frac{180}{180} - \frac{7}{180} = 6\frac{173}{180}$.

4) $3\frac{1}{2}+7\frac{3}{7}-11\frac{1}{9}+\frac{20}{5}-\frac{9}{2}=3+7-11+4-4+\frac{1}{2}+\frac{3}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{2}$
$=-1+\frac{3}{7}-\frac{1}{9}=\frac{3}{7}-(1+\frac{1}{9})=\frac{3}{7}-\frac{10}{9}$
$=\frac{27-70}{63}=\frac{-(70-27)}{63}=\frac{-43}{63}=-\frac{43}{63}$.

5) $\frac{31}{8}+\frac{33}{4}-\frac{23}{100}+\frac{2}{65}-\frac{3}{20}=3\frac{7}{8}+8\frac{1}{4}+\frac{2}{65}-(\frac{23}{100}+\frac{3}{20})$
$=11+\frac{7}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2}{65}-\left(\frac{23+15}{100}\right)$
$=11+\frac{9}{8}+\frac{2}{65}-\frac{38}{100}=11+\frac{9.5.5.13+2.2.2.2.5-38.2.13}{2.2.2.5.5.13}$
$=11+\frac{3005-988}{2600}=11\frac{2017}{2600}$.

6) $9\frac{2}{3}+1\frac{5}{8}+16\frac{4}{7}+5\frac{3}{4}+18\frac{2}{5}+21\frac{1}{3}+17\frac{7}{8}+20\frac{1}{8}+10\frac{2}{9}=121\frac{769}{1260}$.

7) $8\frac{1}{16}+5\frac{7}{9}+50\frac{7}{20}+\frac{3}{48}+12\frac{7}{24}=76\frac{49}{90}$.

8) $112\frac{2}{3}+\frac{9}{8}+117\frac{15}{21}+239\frac{5}{14}+216\frac{3}{56}+\frac{239}{126}=688\frac{205}{252}$.

9) $2316\frac{5}{14}-115\frac{7}{40}-6\frac{3}{70}+6\frac{7}{20}-22\frac{9}{56}-\frac{141}{140}+\frac{5}{28}=2178\frac{1}{2}$.

10) $\frac{5}{82}+1004\frac{1}{70}+\frac{1}{28}-(1000\frac{3}{287}+4\frac{1}{410})=\frac{563}{5740}$.

11) $3\frac{1}{2}-(2\frac{1}{3}+1\frac{1}{27}+2\frac{61}{162})+1\frac{5}{9}+\frac{56}{81}=0$.

§. 62. **Aufgabe.** Man soll einen Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciren.

Auflösung: 1) Ist die gegebene ganze Zahl ein Theiler des Nenners, so theile man den Nenner durch dieselbe. (45. I. N. 2 zu N. 6.)

1) $\frac{3}{8}\cdot 4=\frac{3}{8:4}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$.
2) $\frac{7}{25}\cdot 5=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$.
3) $\frac{9}{132}\cdot 11=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$.
4) $\frac{5}{12}\cdot 6=2\frac{1}{2}$.
5) $\frac{11}{39}\cdot 13=3\frac{2}{3}$.
6) $\frac{17}{300}\cdot 60=3\frac{2}{5}$.
7) $\frac{81}{256}\cdot 32=10\frac{1}{8}$.
8) $\frac{53}{576}\cdot 24=2\frac{5}{24}$.

2) Ist die gegebene Zahl kein Theiler des Nenners, so multiplicire man den Zähler mit derselben. (§. 45. I. 2 zu 1).

1) $\frac{3}{4}\cdot 5=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$.

2) $\frac{13}{8}\cdot 14=\frac{13.2.7}{2.4}=\frac{13.7}{4}=\frac{91}{4}=22\frac{3}{4}$.

3) $\frac{5}{11}.121 = \frac{5.121}{11} = \frac{5.11.11}{11} = 5.11 = 55.$

4) $\frac{3}{8}.24 = \frac{3.3.8}{8} = 3.3 = 9.$

5) $\frac{6}{7}.9 = \frac{54}{7} = 7\frac{5}{7}.$

6) $\frac{5}{12}.9 = 3\frac{3}{4}.$

7) $\frac{11}{33}.52 = 14\frac{2}{3}.$

8) $\frac{85}{64}.96 = 67\frac{1}{2}.$

9) $\frac{53}{90}.23 = 13\frac{49}{90}.$

10) $\frac{90}{99}.27 = 21\frac{9}{11}.$

§. 63. Aufgabe. Man soll Brüche mit einander multipliciren.

Auflösung: Man multiplicire sowohl die Zähler, als auch die Nenner mit einander. §. 46. N. 7.

1) $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{6} = \frac{3.5}{8.6} = \frac{5}{8.2} = \frac{5}{16}.$

2) $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2} = \frac{3.2.5}{4.3.2} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}.$

3) $\frac{99}{100}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{10}{11} = \frac{99.5.10}{100.9.11} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$

4) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{2} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}.$

5) $\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{4}{15} = \frac{77}{360}.$

6) $\frac{13}{16}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{52} = \frac{5}{16}.$

7) $\frac{49}{164}\cdot\frac{48}{77}\cdot\frac{121}{126} = \frac{1}{9}.$

8) $\frac{17}{84}\cdot\frac{56}{85}\cdot\frac{15}{16} = \frac{1}{8}.$

9) $\frac{9}{17}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{102}{47}\cdot\frac{38}{81} = \frac{24}{47}.$

10) $\frac{90}{187}\cdot\frac{154}{99}\cdot\frac{81}{98}\cdot\frac{119}{110} = 1$

§. 64. Aufgabe. Man soll gemischte Zahlen mit einander multipliciren.

Auflösung: Man verwandle die gemischten Zahlen nach §. 58. in unächte Brüche und multiplicire alsdann nach §. 63.

1) $3\frac{5}{6}.4\frac{7}{8} = \frac{23}{6}.\frac{39}{8} = \frac{23.3.13}{3.2.8} = \frac{23.13}{2.8} = 18\frac{11}{16}.$

2) $1\frac{5}{7}.1\frac{1}{6}.5\frac{1}{7}.10\frac{1}{2} = \frac{12}{7}.\frac{7}{6}.\frac{36}{7}.\frac{21}{2} = \frac{2.6.7.6.6.3.7}{2.6.7.7} = 108.$

3) $8.4\frac{3}{8}.9\frac{1}{2} = 8.\frac{35}{8}.\frac{19}{2} = \frac{35.19}{2} = \frac{665}{2} = 332\frac{1}{2}.$

4) $\frac{1}{1000}\cdot\frac{5}{8}.1000.\frac{2}{3}.6.4 = \frac{5.1000.2.6.4}{1000.8.3} = 5.2 = 10.$

5) $2\frac{4}{9}.1\frac{7}{11}.3\frac{3}{4}.1\frac{3}{5} = 24.$

6) $2\frac{2}{9}.3\frac{3}{10}.1\frac{7}{11}.\frac{7}{13} = 7.$

7) $3\frac{33}{80}.9\frac{1}{7}.5\frac{14}{15}.1\frac{13}{32} = 260\frac{13}{40}.$

8) $59\frac{17}{29}.4\frac{11}{48}.10\frac{5}{36}.1\frac{1}{73} = 2590.$

§. 65. Aufgabe. Man soll einen Bruch durch eine ganze Zahl dividiren.

Auflösung: 1) Ist die gegebene Zahl ein Theiler des Zählers, so dividire man den Zähler durch dieselbe. §. 45. Gleichung II. N. 3.

1) $\frac{3}{4}:3 = \frac{3:3}{4} = \frac{1}{4}$.

2) $\frac{6}{7}:2 = \frac{6:2}{7} = \frac{3}{7}$.

3) $\frac{25}{4}:5 = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$.

4) $\frac{99}{100}:11 = \frac{9}{100}$.

5) $\frac{287}{41}:7 = \frac{287:7}{41} = \frac{41}{41} = 1$.

6) $\frac{102}{143}:17 = \frac{6}{143}$.

7) $\frac{297}{49}:27 = \frac{11}{49}$.

8) $\frac{864}{208}:36 = \frac{24}{208}$.

9) $\frac{12832}{971}:28 = \frac{49}{971}$.

10) $\frac{9264}{1007}:84 = \frac{11}{1007}$.

2) Ist der Zähler durch die gegebene Zahl nicht theilbar, so multiplicire man den Nenner damit. §. 45. II. N. 3. zu N. 4.

1) $\frac{6}{7}:5 = \frac{6}{7.5} = \frac{6}{35}$.

2) $\frac{3}{4}:2 = \frac{3}{8}$.

3) $\frac{19}{3}:3 = \frac{19}{9} = 2\frac{1}{9}$.

4) $\frac{22}{5}:4 = \frac{22}{20} = \frac{11}{10} = 1\frac{1}{10}$.

5) $\frac{48}{49}:9 = \frac{16}{147}$.

6) $\frac{68}{76}:28 = \frac{9}{304}$.

7) $\frac{91}{11}:8 = \frac{91}{88} = 1\frac{3}{88}$.

8) $\frac{66}{368}:12 = \frac{11}{780}$.

9) $\frac{88}{97}:32 = \frac{11}{388}$.

10) $\frac{1692}{288}:26 = \frac{13}{576}$.

§. 66. **Aufgabe.** Man soll eine ganze Zahl durch einen Bruch dividiren.

Auflösung: 1) Ist die gegebene Zahl durch den Zähler theilbar, so dividire man dieselbe durch den Zähler, und multiplicire mit dem, was herauskommt, den Nenner. §. 45. I. N. 6. zu N. 2.

1) $8 : \frac{2}{3} = \frac{8}{2} . 3 = 4.3 = 12$.

2) $44 : \frac{11}{4} = \frac{44}{11} . 4 = 4.4 = 16$.

3) $25 : \frac{5}{8} = \frac{25}{5} . 8 = 40$.

4) $60 : \frac{5}{6} = 72$.

5) $85 : \frac{17}{9} = 95$.

6) $126 : \frac{14}{3} = 27$.

7) $336 : \frac{28}{5} = 60$.

8) $210 : \frac{35}{41} = 246$.

9) $1728 : \frac{144}{65} = 780$.

2) Ist die Zahl durch den Zähler nicht theilbar, so kehre man den Divisorbruch um und multiplicire nach §. 62.

1) $7 : \frac{2}{3} = 7 . \frac{3}{2} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$.

2) $10 : \frac{4}{5} = 10 . \frac{5}{4} = \frac{10.5}{4} = \frac{5.5}{2} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$

3) $5 : \frac{25}{7} = 5 . \frac{7}{25} = \frac{7}{25:5} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$.

4) $8 : \frac{32}{5} = 8 . \frac{5}{32} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$.

5) $18 : \frac{27}{19} = 12\frac{6}{9}$.

6) $40 : \frac{161}{21} = 52\frac{1}{2}$.

7) $85 : \frac{51}{40} = 66\frac{2}{3}$.

8) $168 : \frac{70}{79} = 189\frac{3}{5}$.

9) $729 : \frac{1625}{2} = 562\frac{1}{2}$

10) $1000 : \frac{4568}{23} = 49\frac{5}{9}$.

§. 67. Aufgabe. Man soll Brüche durch einander dividiren.

Auflösung: Nach §. 46 N. 8. ist eine doppelte Auflösung möglich: 1) Man dividire sowohl die Zähler als auch die Nenner durch einander, wenn sich die Division ohne Rest ausführen läßt.

1) $\frac{9}{8} : \frac{3}{4} = \frac{9:3}{8:4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

2) $\frac{27}{27} : \frac{9}{27} = \frac{3}{1} = 3$.

3) $\frac{18}{1000} : \frac{3}{100} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

4) $\frac{64}{125} : \frac{8}{5} = \frac{8}{25}$.

5) $\frac{360}{289} : \frac{15}{17} = \frac{24}{17}$.

6) $\frac{551}{561} : \frac{29}{51} = \frac{19}{11}$.

7) $\frac{1024}{405} : \frac{128}{45} = \frac{8}{9}$.

8) $\frac{148}{941} : \frac{37}{105} = \frac{4}{9}$.

2) Man kehre den Divisorbruch um und multiplicire.

1) $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2.4}{3.3} = \frac{8}{9}$.

2) $\frac{15}{2} : \frac{3}{4} = \frac{15}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{15.4}{2.3} = \frac{5.2}{1} = 10$.

3) $(\frac{9}{27} \cdot \frac{21}{567} \cdot \frac{25}{70}) : \frac{1000}{81100} = \frac{3.3.3.7.5.5.81}{3.3.3.7.81.7.10.10} = \frac{5.5}{7.2.2.5.5} = \frac{1}{28}$.

4) $\frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{21}{5} \cdot \frac{4}{11}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{15}{99} \cdot \frac{7}{3}} = \frac{3.5.21.4.2.11.99.3}{8.3.5.11.9.154.7} = \frac{99}{154} = \frac{11 \,.\, 9}{11.14} = \frac{9}{14}$.

5) $\frac{\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{2}}}{\frac{\frac{5}{6}}{\frac{15}{2}}} = \frac{\frac{3.2}{4.5}}{\frac{5.2}{6.15}} = \frac{3.2.6.15}{4.5.5.2.} = \frac{2.2.3.3.3.5}{2.2.2.5.5} = \frac{27}{10} = 2\frac{7}{10}$.

6) $\frac{\frac{13}{2} \cdot \frac{10}{7} \cdot \frac{70}{9}}{\frac{13}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{5}} = \frac{13.10.70.6.7.9}{2.7.9.13.6.10} = 35$.

7) $\frac{\frac{15}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot 14 \cdot \frac{12}{5}}{\frac{21}{8} \cdot 10 \cdot \frac{2}{5}} = 6$.

§. 68. Aufgabe. Man soll gemischte Zahlen durch einander dividiren.

Auflösung: Man verwandle die gemischten Zahlen in unächte Brüche und dividire alsdann nach §. 67.

1) $3\frac{1}{2} : 4\frac{2}{3} = \frac{7}{2} : \frac{14}{3} = \frac{7 \,.\, 3}{2.14} = \frac{3}{4}$.

2) $4\frac{8}{9} : 3\frac{2}{3} = \frac{44}{9} : \frac{11}{3} = \frac{44:11}{9:3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

3) $\frac{x+\frac{1}{2}}{x+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2x+1}{2}}{\frac{3x+2}{3}} = \frac{(2x+1).3}{(3x+2).2} = \frac{6x+3}{6x+4}$.

4) $(\frac{3}{4}+\frac{4}{5}):(5-\frac{3}{10}) = \frac{15+16}{20} : \frac{50-3}{10} = \frac{31}{20} : \frac{47}{10} = \frac{31.10}{20.47} = \frac{31}{94}$.

Weit ſchneller kommt man jedoch in allen derartigen Beiſpielen zum Zweck, wenn man aus den Nennern der gemiſchten Zahlen den Generalnenner bildet und damit den Diviſor und Dividend multiplicirt. Im vorigen Beiſpiele iſt der Generalnenner = 20, und man erhält:

$\frac{(\frac{3}{4}+\frac{4}{5}).20}{(5-\frac{3}{10}).20} = \frac{\frac{3}{4}.20+\frac{4}{5}.20}{5.20-\frac{3}{10}.20} = \frac{15+16}{100-6} = \frac{31}{94}$.

(Generalnenner = 9.)

5) $\frac{4\frac{8}{9}}{3\frac{2}{3}} = \frac{4.9+\frac{8}{9}.9}{3.9+\frac{2}{3}.9} = \frac{36+8}{27+6} = \frac{44}{33} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

6) $\frac{x+\frac{1}{2}}{x+\frac{2}{3}} = \frac{6x+3}{6x+4}$. In dieſem Beiſpiele wurde Zähler und Nenner mit 6 multiplicirt, und das Reſultat ergab ſich ſofort. Kommen jedoch im Zähler und Nenner Producte vor, ſo gewährt das vorſtehende Verfahren keinen Vortheil, z. B.:

(Generalnenner 12.)

7) $\frac{8\frac{1}{4}.5\frac{2}{3}}{2\frac{1}{2}} = \frac{(8\frac{1}{4}.5\frac{2}{3}).12}{2\frac{1}{2}.12} = \frac{8\frac{1}{4}.(60+8)}{24+6} = \frac{8\frac{1}{4}.68}{30} = \frac{33.68}{4.30}$

$= \frac{11.17}{10} = \frac{187}{10} = 18\frac{7}{10}$.

Kürzer wird dagegen die Rechnung nach der Iſten Auflöſung.

$\frac{8\frac{1}{4}.5\frac{2}{3}}{2\frac{1}{2}} = \frac{\frac{33}{4}.\frac{17}{3}}{\frac{5}{2}} = \frac{33.17.2}{4.3.5} = \frac{11.17}{2.5} = \frac{187}{10} = 18\frac{7}{10}$.

8) $\frac{5\frac{5}{8}.9\frac{3}{7}}{6\frac{7}{8}} = 7\frac{5}{7}$.

9) $\frac{7.4\frac{3}{8}.9\frac{1}{2}}{7\frac{7}{8}.2\frac{1}{3}} = 15\frac{5}{6}$.

10) $\frac{8\frac{1}{4}.5\frac{2}{5}}{2\frac{1}{2}} . \frac{7\frac{1}{2}}{7\frac{1}{3}} = 19\frac{1}{5}$.

11) $\frac{\frac{2}{9}.\frac{7}{8}.\frac{15}{21}}{8:\frac{4}{5}.\frac{1}{10}} : \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{\frac{2}{15.\frac{8}{9}}} = \frac{14}{225}$.

12) $\frac{8\frac{3}{4}}{5\frac{1}{3}} = \frac{63}{256}$.

Fünftes Kapitel.

Von den Dezimalbrüchen.

§. 69. Jeden Bruch, deſſen Nenner eine 10 oder eine Potenz von 10 iſt, nennt man einen Dezimalbruch.

Hiernach ſind: $\frac{1}{10}$, $\frac{12}{100}$, $\frac{2341}{10000}$, $\frac{101}{10000}$, $\frac{1}{1000000}$ Dezimalbrüche. Dieſe Brüche drückt man jedoch gewöhnlich kürzer aus, indem man bloß die Zähler hinſchreibt, und den Werth des weggelaſſenen Nenners durch ein im Zähler angebrachtes Komma andeutet. Das Komma bringt man aber dergeſtalt an, daß rechts von ihm noch gerade ſo viele Ziffern (Dezimalſtellen genannt) ſtehen, als der Nenner Nullen hat. Finden ſich aber im Zähler nicht ſo viele Ziffern vor, als der Nenner Nullen hat, ſo ſchreibt man ihm zur Linken ſo viele Nullen vor, als überhaupt Stellen fehlen. Nächſtdem ſetzt man in dieſem Falle noch eine Null vor das Komma. Obige Dezimalbrüche nehmen daher in kürzerer Schreibart die Formen: 0,1, 0,12, 2,341, 0,0101, 0,000001 an.

§. 70. Dezimalbrüche werden gewöhnlich als gemiſchte Zahlen abgeleſen, und man ſagt für $\frac{2341}{1000}$ lieber: „Zwei Ganze und 341 Tauſendtheile", ſo wie für 0,0012 — „Null Ganze und 12 Zehntauſendtheile". Außerdem kann man aber auch den Dezimalbruch 2,341 leſen: „Zwei Ganze, drei Zehntel, vier Hundertel und ein Tauſendtel", inſofern nach §. 15 und §. 39. IV der Bruch $\frac{2341}{1000} = \frac{2000+300+40+1}{1000} = \frac{2000}{1000} + \frac{300}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{1}{1000} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000}$ iſt.

§. 71. Ein Dezimalbruch ändert ſeinen Werth nicht, wenn man ihm zur Rechten beliebig viele Nullen anhängt, oder beliebig viele Nullen wegläßt; denn hängt man ihm z. B. 3 Nullen an, ſo wird dadurch der Zähler und Nenner mit $10^3 = 1000$ multiplicirt, und läßt man dagegen 3 Nullen weg, ſo wird der Zähler und Nenner durch 1000 dividirt. In beiden Fällen aber bleibt der Werth des Bruches nach §. 47. N. 9 ungeändert. Es iſt daher:

$\frac{13}{100} = \frac{13.100}{100.100} = \frac{1300}{10000} = \frac{1300.1000}{10000.1000} = \frac{1300000}{10000000}$, oder:
0,13 = 0,1300 = 0,1300000 u. s. w., und eben so:
$\frac{1300000}{10000000} = \frac{1300000:100000}{10000000:100000} = \frac{13}{100} = 0{,}13$, oder:
0,1300000 = 0,13.

§. 72. Aufgabe. Man soll eine ganze Zahl in einen Dezimalbruch mit gegebenem Nenner verwandeln, z. B. die 8 soll den Nenner 1000 erhalten.

Auflösung: $8 = \frac{8.1000}{1000} = \frac{8000}{1000} = 8{,}000$. §. 39. II.

§. 73. Aufgabe. Es soll der gewöhnliche Bruch $\frac{5}{8}$ in einen Dezimalbruch, dessen Nenner 1000 ist, verwandelt werden.

Auflösung: Es ist $\frac{5}{8} = \frac{5.1000}{8.1000} = \frac{5000}{8000}$. Nun ist aber nach §. 45. II: $\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c$, also auch: $\frac{5000}{8.1000} = \frac{5000}{8} :$
$1000 = 625 : 1000 = 0{,}625$.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich für die Verwandlung der gewöhnlichen Brüche in Dezimalbrüche die Regel:

„Man hänge im Zähler so viele Nullen an, als Dezimalstellen verlangt werden, führe hierauf die Division aus, und schneide im Quotientenwerthe wiederum so viele Stellen ab, als Nullen im Zähler angehängt wurden."

Anmerkung. Beim practischen Rechnen hängt man die Nullen gewöhnlich nicht mit einem Male, sondern erst nach und nach an.

§. 74. Aufgabe. Es soll der gewöhnliche Bruch $\frac{3}{7}$ in einen Dezimalbruch, dessen Nenner 1000 ist, verwandelt werden.

Auflösung: $\frac{3}{7} = \frac{3.1000}{7.1000} = \frac{3000}{7.1000} = \frac{3000}{7} : 1000 =$
$\frac{428\ldots}{1000} = 0{,}428\ldots$ (Es ist nämlich nach §. 45. II. N. 4. $\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c$, welches Gesetz hier in Anwendung kam.)

In dem vorstehenden Beispiele ging die Division des Nenners 7 in 3000 nicht auf, und dies wäre auch alsdann noch der Fall gewesen, wenn man dem Zähler beliebig viele Nullen angehängt hätte, weil eine Zahl mit Nullen zur Rechten nur durch 2, 5 und 10, §. 54, oder durch ein Product aus diesen Zahlen theilbar ist. Der gewöhnliche Bruch $\frac{3}{7}$ läßt sich daher nicht vollständig als Dezimalbruch ausdrücken, so daß auch 0,428 bloß ein Annäherungswerth für $\frac{3}{7}$ ist, der

aber immer genauer wird, je weiter man die Division fortsetzt. Man schreibt alsdann: $\frac{3}{7} = 0{,}428\ldots$, welche Gleichung nur unter der Voraussetzung richtig ist, daß man sich die fehlenden, durch Punkte bezeichneten Dezimalstellen noch hinzudenkt. Von diesen Dezimalstellen nimmt man gewöhnlich nur so viele, als die Genauigkeit der Rechnung verlangt. Hierbei vermehrt man die letzte Dezimalstelle um eine Einheit, wenn die darauf folgende (weggelassene) größer als 5 ist. So z. B. schreibt man für 0,3011347, wenn nur 6 Dezimalstellen verlangt werden, nicht: 0,301134..., sondern 0,301135, und man hat jetzt, indem 0,0000007 als ein Milliontheil betrachtet und zu den 4 Milliontheilen noch hinzugenommen wurde, einen um 0,0000003 zu großen, aber doch genaueren Werth, als wenn man 0,0000007 weggelassen und bloß 0,301134 gesetzt haben würde.

§. 75. Jeden Dezimalbruch mit unendlich vielen Dezimalstellen (durch Puncte angedeutet) nennt man einen irrationalen, oder kurzweg eine Irrational-Zahl, während jede mit einer bestimmten Anzahl Ziffern geschriebene, ganze oder gebrochene Zahl eine rationale Zahl heißt. So z. B. ist der Bruch $\frac{2}{3}$ eine rationale Zahl, während man eine irrationale Zahl erhält, wenn man $\frac{2}{3}$ in einen Dezimalbruch $= 0{,}666\ldots$ verwandelt.

§. 76. Setzt man die Division bei der Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Dezimalbruch beliebig fort, so erscheinen, wenn der Dezimalbruch irrational ist, die bereits im Quotientenwerthe erhaltenen Ziffern in derselben Ordnung wieder, und man nennt dieses Wiederkehren der Dezimalstellen eine Periode, so wie den Dezimalbruch selbst einen vollständig periodischen, wenn die Periode schon in der 1sten Stelle beginnt, oder einen unvollständig periodischen, wenn dieselbe sich erst in einer der folgenden Stellen zeigt. So z. B. sind: 0,3333..., 4,515151...., 0,13451345...., vollständig- und 0,83333..., 4,01515151...., 0,8713451345.... unvollständig periodische Dezimalbrüche.

Dieses Wiederkehren der Dezimalstellen muß bei irrationalen Dezimalbrüchen nothwendig stattfinden, weil der jedesmalige Rest stets kleiner ist als der Divisor, so daß auch nie mehr verschiedene Reste bei der Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Dezimalbruch vorkommen können, als der Divisor Einheiten enthält weniger einer. Stößt man nun im Verlaufe der Division auf einen Rest, welcher schon einmal dagewesen ist, so erhält man auch im Quotienten-

werthe dieselbe Ziffer wieder, und es müssen, diesem zufolge, alle frühern Reste und die ihnen entsprechenden Ziffern im Quotientenwerthe ebenfalls in derselben Ordnung wiederkehren; z. B.:

$\frac{1}{7} = 7$ | 300000000.... | 0,428571428571....
28.....
20.....
14.....
60.....
56.....
40....
35....
50...
49...
10..
7..
30.
28.
*20
14
60 u. s. w.

In dem vorstehenden Beispiele ist der 7te Rest, nämlich 20, schon einmal dagewesen, und es erscheinen daher, vom 6ten Reste ab, die erhaltenen Dezimalstellen, ohne Ende fort, immer wieder.

§. 77. Aufgabe. Man soll Dezimalbrüche unter einerlei Benennung bringen; z. B.: 0,89, 2,345 und 0,0011.

Auflösung: Man multiplicire nach §. 47 Zähler und Nenner des ersten Bruches mit 100, und den Zähler und Nenner des 2ten mit 10; so gehen die Brüche ohne Aenderung des Werthes in: 0,8900, 2,3450 und 0,0011 über; daher die Regel: „Dezimalbrüche werden auf gleiche Benennung gebracht, wenn man ihnen zur Rechten so viele Nullen anhängt, als nothwendig sind, damit jeder gleich viel Stellen erhalte."

§. 78. Aufgabe. Man soll Dezimalbrüche addiren und subtrahiren.

Auflösung: Brüche, also auch Dezimalbrüche, werden addirt oder subtrahirt, indem man sie auf gleiche Benennung bringt, und dann nach §. 39. N. IV die Zähler addirt oder subtrahirt und im Resultate den gemeinschaftlichen Nenner beibehält; z. B.: $7{,}32 + 3{,}567 = \frac{732}{100} + \frac{3567}{1000} = \frac{7320}{1000} + \frac{3567}{1000}$
$= \frac{10887}{1000} = 10{,}887.$

Oder: $7{,}32 - 3{,}567 = 7{,}320 - 3{,}567 = 3{,}753.$

$4 - 0{,}832 = 4{,}000 - 0{,}832 = 3{,}168.$

Beim practischen Rechnen schreibt man die Dezimalbrüche so unter einander, daß Komma unter Komma, Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel u. s. w. zu stehen kommen. Hierauf addirt man die Zähler und schneidet so viele Dezimalstellen im Resultate ab, als der mit den meisten Stellen versehene Summand Stellen hat.

Beispiele.

1)	2)	3)	4)	5)
0,34	3,8001	6,297	0,70009	0,99857
0,0013	7,003	12,29	37,86	—3,6231
101,1	—0,18	407,9	27,918	42,987
24,53	—3,45	—18,7293	9,7	—6,54
125,9713	9,7	— 6,00912	—152,6043	—0,1
	+20,5031	16,230096	—152,6043	236,50012
	— 3,6300	+442,717096	76,17809	280,48569
	16,8731	— 24,73842	— 76,42621	—10,2631
		417,978676		270,22259

§. 79. Aufgabe. Man soll ganze Zahlen zu Dezimalbrüchen addiren, oder davon subtrahiren.

Auflösung: Man verfährt eben so wie bei der Verwandlung der gemischten Zahlen in unächte Brüche. §. 58.

1) $5 + 0{,}634 = \frac{5000 + 634}{1000} = 5{,}634.$

2) $5 - 0{,}634 = \frac{5000 - 634}{1000} = 4{,}366.$

3) $7{,}345 - 6 = \frac{7345 - 6000}{1000} = 1{,}345.$

4) $3{,}345 - 6 = \frac{-(6000-3345)}{1000} = -2{,}655.$

§. 80. Aufgabe. Man soll Dezimalbrüche mit einander multipliciren.

Auflösung: Man multiplicire Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. §. 46. N. 7; z. B.:

$0{,}39 . 0{,}003 = \frac{39}{100} \cdot \frac{3}{1000} = \frac{117}{100000} = 0{,}00117.$

Hieraus folgt die Regel: „Man multiplicire die Dezimalbrüche, nach Weglassung des Kommas, wie ganze Zahlen und schneide im Productenwerthe so viele Stellen von der Rechten zur Linken ab, als beide Dezimalbrüche zusammen Stellen haben.

1) $3{,}14 . 1{,}2 = 3{,}768.$
2) $113{,}5 . 0{,}072 = 8{,}172.$
3) $0{,}005 . 0{,}017 = 0{,}000085.$

4) 1,766.2,24 = 3,95584.
5) 18,06.0,423 = 7,63938.
6) 94,823.7,602 = 720,844446.
7) 2,395.36,572 = 87,58994.
8) 0,1882.42,65 = 8,02673.

§. 81. Aufgabe. Man soll einen Dezimalbruch mit einer ganzen Zahl multipliciren.

Auflösung: Ist die ganze Zahl die 10 oder ein Product aus lauter Zehnen (Potenz von Zehn), so dividire man den Nenner des Dezimalbruches durch diese Potenz von Zehn; in jedem andern Falle aber multiplicire man den Zähler mit der gegebenen ganzen Zahl. §. 45. I; z. B.:

$$3{,}0401 \cdot 6 = \frac{30401 \cdot 6}{10000} = \frac{182406}{10000} = 18{,}2406.$$

$$13{,}045 \cdot 100 = \frac{13045}{1000 : 100} = \frac{13045}{10} = 1304{,}5.$$

Hieraus folgt die practische Regel:

„Ist der Dezimalbruch mit 10, oder einer Potenz von 10, zu multipliciren, so rücke man das Komma im Multiplicandus um so viele Stellen von der Linken zur Rechten, als der Multiplicator Nullen hat."

1) 13,45 . 1000 = 13450.
2) 0,0678 . 10000 = 678.
3) 0,0678 . 10 = 0,678.
4) 0,00001 . 100000 = 1.

§. 82. Aufgabe. Man soll Dezimalbrüche durch einander dividiren.

Auflösung: Man gebe ihnen gleiche Nenner und dividire Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner. §. 46. N. 8; z. B.:

1) $0{,}34 : 4{,}631 = \frac{34}{100} : \frac{4631}{1000} = \frac{340}{1000} : \frac{4631}{1000} = \frac{340}{4631}$ und jetzt nach §. 73.
$\frac{340}{4631} = 0{,}0734....$
2) 2,6:7,59 = 260:759 = 0,3425....
3) 1,44:0,012 = 1440:12 = 120.
4) 3,46:0,0001 = 3,4600:0,0001 = 34600:1 = 34600.
5) 0,0001:3,46 = 1:34600 = 0,000028.....
6) 0,00345:0,61 = 0,00565.... .

Die allgemeine Regel für die Division der Dezimalbrüche ist daher:

„Man gebe beiden Brüchen, durch Anhängung von Nullen,

gleich viele Dezimalstellen; hierauf lasse man das Komma weg und dividire die Zähler nach §. 73. und 74."

§. 83. Aufgabe. Man soll eine ganze Zahl durch einen Dezimalbruch, oder einen Dezimalbruch durch eine ganze Zahl dividiren.

Auflösung: Man denke sich die ganze Zahl nach §. 72 als Dezimalbruch mit gleichem Nenner geschrieben und verfahre alsdann nach der vorigen Aufgabe; z. B.:

1) $507:3{,}14 = 507{,}00:3{,}14 = 50700:314 = 161{,}4649....$
2) $1:0{,}24 = \frac{100}{24} = \frac{25}{6} = 4{,}166.....$
3) $3:24{,}63 = \frac{300}{2463} = 0{,}1218.....$
4) $0{,}037:4 = 37:4000 = 0{,}00925.$
5) $13{,}645:100 = 13645:100000 = 0{,}13645.$

Für den letztern Fall ergiebt sich die Regel:

„Ist ein Dezimalbruch durch 10, oder durch eine Potenz von 10 zu dividiren, so rücke man das Komma im Dividendus um so viele Nullen weiter links, als der Divisor Nullen hat."

1) $568{,}034:1000 = 0{,}568034.$
2) $0{,}00134:1000 = 0{,}00000134.$
3) $568{,}453:100 = 5{,}68453.$

Für das schnellere Rechnen ist es bequem die Division der Dezimalbrüche nach folgender Regel auszuführen:

„Man stelle den Divisorbruch als ganze Zahl dar, indem man die zu dividirenden Brüche mit dem Divisor des Divisorbruchs multiplicirt. Hierauf verrichte man die Division wie bei ganzen Zahlen und setze, sobald die Division bis zum Dezimalstrich des Dividenden ausgeführt ist, im Quotientenwerth ein Komma; z. B.:

1) $0{,}003:3{,}01 = 0{,}3:301 = 0{,}000996...$
2) $0{,}896:34 = 0{,}0263...$
3) $34:0{,}896 = 34000:896 = 39{,}06241.$
4) $18326:0{,}476 = 38500.$
5) $2:0{,}24 = 8{,}33...$
6) $15{,}713:18{,}13 = 0{,}86668505...$
7) $0{,}007672:0{,}056 = 0{,}137.$
8) $2009{,}3724:0{,}0054 = 372106.$

Noch andere Uebungsbeispiele:

1) $55{,}283 : 3{,}56 = 55283 : 3560 = 15{,}5289\ldots$
2) $4{,}32 : 0{,}005 = 4320 : 5 = 864.$
3) $0{,}3 : 1{,}302 = 300 : 1302 = 0{,}2304\ldots$
4) $5{,}22 : 5 = 1{,}044.$
5) $5 : 5{,}22 = 500 : 522 = 0{,}9578\ldots$
6) $0{,}03 : 0{,}2412 = 0{,}124378\ldots.$
7) $0{,}25821 : 3 = 0{,}08607.$
8) $0{,}001 : 1001 = 0{,}0000009990009\ldots$
9) $1001 : 0{,}001 = 1001000.$
10) $7 : 0{,}0034 = 2058{,}82352\ldots$
11) $1 : 0{,}9999 = 1{,}00010001\ldots$
12) $1 : 3{,}2561047 = 0{,}30711543\ldots$
13) $1114{,}869145005 : 0{,}385 = 2895{,}764013.$
14) $56{,}4 : 0{,}00015 = 376000.$
15) $374 : 2{,}4 = 155{,}8333\ldots$
16) $338 : 0{,}001 = 338000.$
17) $10287{,}36 : 0{,}0036 = 2857600.$
18) $\frac{1}{4{,}5 \,.\, 70{,}12} = 0{,}003169\ldots.$
19) $\frac{67{,}34}{75{,}6 \,.\, 0{,}785} = 1{,}1347\ldots.$
20) $\frac{54{,}7 \,.\, 6{,}7}{37{,}65 \,.\, 0{,}0044} = \frac{366{,}49}{0{,}16566} = 2212{,}3023.$

§. 84. Aufgabe. Man soll die Dezimalbrüche 0,7686 und 0,5376 auf eine abgekürzte Art mit einander multipliciren.

Auflösung: Man multiplicirt zunächst den Multiplicandus mit der am weitesten zur Linken stehenden Ziffer des Multiplicators (5) und schneidet in diesem ersten Partialproducte sogleich die Ganzen ab. Hierauf streicht man die letzte Ziffer im Multiplicandus (6) durch, und multiplicirt die noch übrigen mit der zweiten Ziffer des Multiplicators (3), und zählt zu diesem Product die Zehner noch mit hinzu, welche die Multiplication der durchgestrichenen Ziffer giebt. Das so gebildete zweite Partialproduct setzt man, ohne rechts herauszurücken, unter das erstere. Hierauf streicht man die folgende Ziffer des Multiplicandus (im Beispiele die 8) durch, und multiplicirt die noch übrigen Ziffern mit der nächst folgenden des Multiplicators (7) und zählt zu diesem Producte die Hunderter noch hinzu, die man aus der Multication der zuletzt durchgestrichenen Stelle erhalten haben würde. Das so gebildete dritte Partialproduct setzt man wiederum, ohne rechts herauszurücken, unter das 2te. Hierauf streicht man die dritte Stelle des Multiplicandus durch und setzt die Rechnung, analog dem Vorhergehenden, so lange fort, bis mit der letzten Stelle des Multiplicators multiplicirt worden ist.

Unſer Beiſpiel kommt hiernach, wie folgt, zu ſtehen:

0,7686
0,5376
0,38430
2305
537
45
0,41317

1) 3,060
0,000345
0,0009018
1202
150
0,0010370

2) 433,417
0,008396
3,467336
130025
39007
2600
3,638968

) 0,026876 . 0,002434 = 0,000065416.
.) 579,3246 . 0,1491 = 86,37729.
5) 27,65432 . 334 = 9236,543.
() 1,21958 . 0,65432 = 0,797994.
') 8,56794323 . 0,5284765 = 4,527956650.

§. 85. Aufgabe. Man ſoll Dezimalbrüche auf eine :bgekürzte Art dividiren.

Auflöſung: Man verrichtet die Diviſion zunächſt wie gewöhnlich, ſtreicht aber, nachdem die 1te Ziffer des Quotientenwerthes mit dem Diviſor multiplicirt worden iſt, die letzte Ziffer im Diviſor durch und hängt im Reſt keine Null an. Hierauf dividirt man mit den noch übrigen Ziffern des Diviſors in den gebliebenen Reſt, multiplicirt die im Quotientenwerthe erhaltene 2te Ziffer mit dem Diviſor und zählt zu dieſem Producte noch die Zehner mit hinzu, welche die Multiplication der durchgeſtrichenen Stelle giebt. Hierauf ſtreicht man die folgende Ziffer im Diviſor durch und ſetzt die Rechnung, analog dem Vorhergehenden, ſo lange fort, bis mit der letzten Ziffer des Diviſors dividirt worden iſt. Das Komma im Quotientenwerthe wird ſogleich bei der erſten Diviſion beſtimmt; z. B. 6,783:5,883.

Rechnung:

5,883	6783	1,153
	5883	
588	900	
	588	
58	312	
	294	
5	18	
	17	
	1	

1) 729:6352,49781 = 0,114758094.

Rechnung:

635249781	729000000	0,114758094
	635249781	
63524978	93750219	
	63524978	
6352497	30225241	
	25409991	
635249	4815250	
	4446747	
63524	368503	
	317624	
6352	50879	
	50819	
635	600	
	571	
6	29	
	25	
	4	

2) 0,000063275:0,00003254 = 1,945.
3) 836,0204005:537,84269 = 1,554395767.
4) 0,075432:0,23456 = 0,32158.
5) 10,926954:0,3547808 = 30,79917.

§. 86. Aufgabe. Man soll einen vollständig periodischen Dezimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch verwandeln; z. B. 0,5454....

Auflösung: Man setze:

1) 0,5454.... = x. Diese Gleichung mit 100 multiplicirt,

giebt: 2) 54,54.... = 100x, und N. 1 von N. 2 subtrahirt

$54 = 100x - x$

$54 = 99x$, und auf beiden Seiten durch 99 dividirt

$\frac{54}{99} = x$, daher:

$0{,}5454 = \frac{54}{99} = \frac{6}{11}$.

Ferner: 0,603603... soll in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden.

1, 0,603603.... $= x$; multiplicirt mit 1000

2, 603,603.... $= 1000\,x$; N. 1 von 2 subtrahirt,

giebt: $603 = 999\,x$; durch 999 dividirt

$\frac{603}{999} = x$; daher:

0, 603603... $= \frac{603}{999} = \frac{67}{111}$.

Aus dem Vorstehenden folgt die Regel:

„Man dividire die Periode durch eine Zahl, welche aus so vielen Neunen besteht, als die Periode Stellen hat."

Es ist daher auch: $0{,}333.... = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

$3{,}2727.... = 3\frac{27}{99} = 3\frac{3}{11}$.

$15{,}148148.... = 15\frac{4}{27}$.

§. 87. Aufgabe. Man soll einen unvollständig periodischen Dezimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch verwandeln; z. B. 0,8333....

Auflösung: Bezeichnet man den gesuchten Bruch wiederum durch x, so ist:

1) $0{,}8333.... = x$; multiplicirt mit 10, giebt:

2) $8{,}333.... = 10\,x$; multiplicirt mit 10, giebt:

3) $83{,}333.... = 100\,x$.

Subtrahirt man jetzt N. 2 von 3, so ist:

$83{,}33 - 8{,}33 = 100\,x - 10\,x$

$83 - 8 = 90\,x$

$75 = 90\,x$; dividirt durch 90, giebt:

$\frac{75}{90} = x$; daher:

$0{,}8333... = \frac{75}{90} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$.

Ferner: 1, $0{,}208333.. = x$; multiplicirt mit 1000, giebt:

2, $208{,}333.... = 1000\,x$; multiplicirt mit 10, giebt:

3, $2083{,}333.... = 10000\,x$; N. 2 von 3 subtrahirt,

giebt: $2083{,}333... - 208{,}333... = 10000\,x - 1000\,x$

$2083 - 208 = 9000\,x$

$1875 = 9000\,x$

$\frac{1875}{9000} = x$;

daher: $0{,}208333... = \frac{1875}{9000} = \frac{375}{1800} = \frac{75}{360} = \frac{15}{72} = \frac{5}{24}$.

1) $0{,}5363636.... = \frac{59}{110}$.

2) $0{,}00123123... = \frac{41}{33300}$.

3) $23{,}53636\ldots = 23\frac{59}{110}$.
4) $8{,}23456456\ldots = 8\frac{7811}{33300}$.
5) $0{,}58333\ldots = \frac{7}{12}$.
6) $4{,}09999\ldots = 4\frac{1}{10}$.
7) $36{,}23737\ldots = 36\frac{47}{198}$.

Aus dem Obigen folgt die Regel:

„Man verwandle den unvollständig periodischen Dezimalbruch zunächst in einen vollständig periodischen, und stelle diesen nach §. 86 als gewöhnlichen Bruch dar. Dividirt man nun diesen letzteren Bruch wieder durch diejenige Potenz von 10, mit der man anfänglich multiplicirte, so hat man den unvollständig periodischen Dezimalbruch, ohne Aenderung seines Werthes, in einen gewöhnlichen verwandelt; z. B.:

$$0{,}34222\ldots = \frac{77}{225}.$$

Man hat: $34{,}222\ldots = 34\frac{2}{9} = \frac{308}{9}$;

daher: $0{,}34222\ldots = \frac{308}{9} : 100 = \frac{308}{900} = \frac{77}{225}$.

§. 88. Fragen und Antworten.

1) Was versteht man unter einem Bruch? Antwort: §. 56. 1.
2) Wenn heißt ein Bruch ächt, wenn unächt? §. 56. 2.
3) Was versteht man unter einer gemischten Zahl? §. 56. 3.
4) Was ist ein Dezimalbruch, und wie nennt man zum Unterschiede die übrigen? §. 56. 5.
5) In welchem Falle nennt man einen Bruch reducirt, und wie geschieht die Reduction der Brüche? §. 56. 6 und 57.
6) Wie werden Brüche von gleichen Nennern addirt? §. 60. 1.
7) Wie werden zwei Brüche von verschiedenen Nennern addirt? §. 60. 2.
8) Wie werden mehr als zwei Brüche von verschiedenen Nennern addirt? §. 60. 3.
9) Wie ist zu verfahren, wenn man die Addition der Brüche dergestalt ausführen will, daß die Zähler und Nenner sämmtlicher Brüche, nachdem dieselben auf gleiche Benennung gebracht worden sind, keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben? §. 60, 4.
10) Wie wird ein Bruch mit einer ganzen Zahl, oder eine ganze Zahl mit einem Bruche multiplicirt? §. 62.
    Antw.: Wenn die ganze Zahl ein Theiler des Nenners ist, so dividire man den Nenner durch dieselbe, im anderen Falle multiplicire man den Zähler mit derselben.
11) Wie werden Brüche mit einander multiplicirt? §. 63.
12) Wie werden gemischte Zahlen mit einander multiplicirt? §. 64.
13) Wie wird ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt? §. 65.

Antw.: Wenn die ganze Zahl ein Theiler des Zählers ist, so dividire man den Zähler durch dieselbe, im anderen Falle multiplicire man den Nenner mit derselben.

14) Wie wird eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt? §. 66.
Antw.: Ist die ganze Zahl durch den Zähler theilbar, so dividire man dieselbe durch den Zähler und multiplicire mit dem, was herauskommt, den Nenner; im andern Falle aber kehre man den Bruch um, und multiplicire.

15) Wie werden Brüche durch einander dividirt? §. 67.

16) Wie werden gemischte Zahlen durch einander dividirt? §. 68.

17) Welche kürzere Schreibart hat man bei den Dezimalbrüchen eingeführt? §. 69.

18) Auf wie vielerlei Weise kann ein Dezimalbruch gelesen werden? §. 70.

19) Wie wird ein gewöhnlicher Bruch in einen Dezimalbruch verwandelt? §. 73 u. 74.

20) In welchem Falle läßt sich ein gewöhnlicher Bruch nicht vollständig in einen Dezimalbruch verwandeln? §. 74.

21) Was findet alsdann statt? §. 74.

22) Warum stößt man bei irrationalen Dezimalbrüchen stets auf eine Periode? §. 76.

23) Wie werden Dezimalbrüche addirt und subtrahirt? §. 78.

24) Wie werden Dezimalbrüche mit einander multiplicirt? §. 80.

25) Wie werden Dezimalbrüche durch einander dividirt? §. 82.

26) Wie wird ein Dezimalbruch mit 10, oder mit einer Potenz von 10 multiplicirt? §. 81.

27) Wie wird ein Dezimalbruch durch 10, oder durch eine Potenz von 10 dividirt? §. 83.

28) Wie werden periodische Dezimalbrüche in gewöhnliche Brüche verwandelt? §. 86 und §. 87.

III. Abschnitt.

Von den vier Elementar-Operationen mit Rechnungsformen.

Sechstes Kapitel.

Regeln, welche bei der Addition, Subtraction, Multiplication und Division der Rechnungsformen in Anwendung kommen.

§. 89. Beim Rechnen mit absoluten Zahlen kommt man sehr häufig (wie wir bereits in dem Früheren, §. 30. 10

und 11, gesehen haben) auf Ausdrücke von der Form (p—p)+a und (p—p)—a, wofür man kürzer schreibt 0+a und 0—a, oder auch bloß +a und —a. Der Ausdruck +a, welcher also immer die Summe 0+a vorstellt, heißt ein additiver oder positiver, und der Ausdruck —a, welcher die Differenz 0—a bedeutet, ein subtractiver oder negativer. Die Zahl a in +a oder —a wird das Glied des additiven oder subtractiven Ausdrucks genannt.

Da wir im I. Abschnitte sämmtliche Regeln für das Rechnen mit Summen und Differenzen hingestellt haben, so kann man nun auch mit +a und —a nach diesen Regeln rechnen, wenn man für +a die gleichbedeutende Summe 0+a und für —a die gleichbedeutende Differenz 0—a schreibt.

Es würde jedoch sehr weitläufig sein, wenn man für +a und —a immer 0+a und 0—a setzen wollte, und deßhalb suchen wir ein für alle Mal die Resultate auf, welche das Operiren mit jenen Formen giebt. Diese Resultate aber benutzen wir demnächst als neue Rechnungsregeln.

Die Null, als ein kürzeres Zeichen für alle Differenzen von der Form p—p, gehört ebenfalls, da man sich darunter keine wirkliche Zahl denken kann, zu den Rechnungsformen.

§. 90. Für das Operiren mit der Null stellen wir die bereits in dem Früheren erhaltenen Resultate nochmals übersichtlich zusammen.

1) $a+0=a$. §. 30. 1.
2) $a-0=a$. §. 30. 2.
3) $a\,.\,0=0$. §. 34. 18.
4) $\frac{0}{a}=0$. §. 40. 3.

5) $\frac{a}{0}$ giebt keinen Zahlenwerth und ist vom Operiren auszuschließen. §. 43.

§. 91. Addition und Subtraction der Rechnungsformen +a und —a.

§. 27. A. N. 2. zu N. 1.

1) $+a=a$; denn $+a=0+a=(p-p)+a=(p+a)-p=(a+p)-p=a$.

Regel: Für jede additive Zahl +a kann die absolute Zahl a gesetzt werden; also ist:

$a+(+b)=a+b.$
$a-(+b)=a-b.$

2) $a+(-b)=a-b=-(b-a)$
nach N. 3. zu 1 Gleichung A. §. 27.

Beweis: $a+(-b)=a+(0-b)=(a+0)-b=a-b.$

Es ist aber auch $a-b=-(b-a)$, weil man jede Differenz umkehren kann, wenn man ihr das Minuszeichen vorsetzt. §. 27. N. 3 zu 4.

Beispiele: $a-5a=-(5a-a)=-(5-1)a=-4a.$
$7-12=-(12-7)=-5.$

3) $a-(-b)=a+b.$
nach N. 4 zu 3 Gleichung A. §. 27.

Beweis: $a-(-b)=a-(0-b)=a+(b-0)=a+b.$

4) $(-a)+(-b)=-(a+b).$

Beweis: $(-a)+(-b)=(0-a)+(-b)=(0-a)-b=0-(a+b)=-(a+b).$ §. 22. VII.

5) $(-a)-(-b)=b-a=-(a-b).$
nach 3. nach 2.

Beweis: $(-a)-(-b)=(-a)+b=b+(-a)=b-a.$

Aus 1 bis 5 ergeben sich für die Addition und Subtraction der positiven und negativen Ausdrücke folgende Regeln:

A. Addition.

I. Haben die zu addirenden Ausdrücke einerlei Vorzeichen, so addirt man die Glieder und giebt der Summe derselben wiederum das gemeinschaftliche Vorzeichen; z. B.:

1) $(+a)+(+b)=+(a+b)=a+b.$ N. 1.
2) $(-a)+(-b)=-(a+b).$ N. 4.
3) $(-3)+(-4)=-(3+4)=-7.$
4) $(+3a)+(+4a)=+(4a+3a)=7a.$
5) $(-a)+(-a)=-(a+a)=-2a.$ N. 4.
6) $(-3a)+(-5a)=-(3a+5a)=-8a.$
7) $(-a)+(-5a)+(-6a)=-(a+5a)+(-6a)=-(a+5a+6a)=-12a.$
8) $-m+(-3m)+(-2m)=-(m+3m+2m)=-6m.$
9) $-\frac{3}{4}+(-\frac{5}{4})=-(\frac{3}{4}+\frac{5}{4})=-\frac{8}{4}=-2.$
10) $-\frac{a}{m}+-\frac{3a}{m}=-\left(\frac{a}{m}+\frac{3a}{m}\right)=-\frac{a+3a}{m}=-\frac{4a}{m}.$

II. Haben die zu addirenden Ausdrücke verschiedene Vorzeichen, so subtrahirt man das Glied des kleineren von dem Gliede des größeren, und giebt der gebildeten Differenz wiederum das Vorzeichen, welches der Minuend als Summand hatte.

1) $3+(-7)=-(7-3)=-4$.
2) $(-a)+(+3a)=+(3a-a)=+2a=2a$.
3) $7a+(-9a)=-(9a-7a)=-2a$.
4) $(-3a)+(+5a)+(-2a)=+(5a-3a)+(-2a)=2a+$
$+(-2a)=2a-2a=0$.
5) $-12b+(-3b)+10b=-15b+10b=-(15b-10b)=-5b$.

Kommen aber in der gegebenen Summe verschiedene Buchstaben vor, so ziehe man nach Belieben ab, und setze der erhaltenen Differenz das Vorzeichen vor, welches der Minuend als Summand hatte.

6) $(-6a)+(+10b)=+(10b-6a)=-(6a-10b)$.
7) $m+(-3n)=-(3n-m)=m-3n$.
8) $\frac{a}{b}+\left(-\frac{c}{d}\right)=-\left(\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right)=-\frac{cb-ad}{bd}=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=$
$\frac{ad-bc}{bd}$.
9) $-\frac{3a}{b}+\left(+\frac{a}{b}\right)=-\left(\frac{3a}{b}-\frac{a}{b}\right)=-\left(\frac{3a-a}{b}\right)=-\frac{2a}{b}$.
10) $-3a+\frac{a}{b}=-\left(3a-\frac{a}{b}\right)=-\frac{3ab-a}{b}=+\left(\frac{a}{b}-3a\right)=$
$\frac{a-3ab}{b}$.

B. Die Subtraction.

Jedem zu subtrahirenden Ausdrucke gebe man das entgegengesetzte Vorzeichen, und addire alsdann die Ausdrücke nach den Regeln A. I und II.

1) $(-a)-(-b)=-a+(+b)=b-a=-(a-b)$.
2) $(-b)-(+c)=-b+(-c)=-(b+c)$.
3) $b-(-c)=b+(+c)=b+c$.
4) $-5-(-9)=-5+(+9)=9-5=4$.
5) $5-(+9)=5+(-9)=-(9-5)=-4$.
6) $5-(-9)=5+(+9)=5+9=14$.
7) $-12-(+5)=-12+(-5)=-17$.
8) $-13-(-8)=-13+(+8)=-(13-8)=-5$.
9) $-8-(-15)=-8+(+15)=+(15-8)=7$.
10) $-3a-(+7a)=-3a+(-7a)=-10a$.
11) $9a-(+3a)=9a+(-3a)=+(9a-3a)=6a$.
12) $3m-\left(-\frac{3m}{a}\right)=3m+\left(+\frac{3m}{a}\right)=3m+\frac{3m}{a}=\frac{3am+3m}{a}=$
$\frac{3m(a+1)}{a}$.
13) $\frac{a}{b}-\left(-\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}+\frac{a}{b}=\frac{2a}{b}$. §. 60. 1.

14) $\frac{5}{6}-(-\frac{3}{4})=\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{20+18}{24}=\frac{38}{24}=\frac{19}{12}=1\frac{7}{12}$. §. 60. 2.

15) $-\frac{3}{5}-(-\frac{6}{5})=-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}=+(\frac{6}{5}-\frac{3}{5})=\frac{6-3}{5}=\frac{3}{5}$.

16) $-\frac{6}{7}-(-\frac{4}{9})=-\frac{6}{7}+\frac{4}{9}=-(\frac{6}{7}-\frac{4}{9})=-\frac{54-28}{63}=-\frac{26}{63}$;

oder: $=+(\frac{4}{9}-\frac{6}{7})=\frac{28-54}{63}=\frac{-(54-28)}{63}=-\frac{26}{63}$.

§. 92. Multiplication und Division der Rechnungsformen $+a$ und $-a$.

1) $(+a).(+b)=ab$.

2) $a.(-b)=-ab$; denn: $a.(-b)=a.(0-b)=a.0-ab=0-ab=-ab$.

3) $(-a).(-b)=ab$; denn: $(-a).(-b)=(0-a).(-b)=0.(-b)-a.(-b)=(-0)-(-ab)=-0+ab=ab+(-0)=ab-0=ab$.

4) $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$; denn: $\frac{-a}{b}=\frac{0-a}{b}=\frac{0}{b}-\frac{a}{b}=0-\frac{a}{b}=-\frac{a}{b}$.

5) $\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$.

Beweis: Es soll sein: $\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$; man multiplicire mit $-b$,

so ist: $\frac{a}{-b}.(-b)=-\frac{a}{b}.(-b)$

$a=-\frac{-ab}{b}=-\left(-\frac{ab}{b}\right)=0-(-a)=$

$0+a=a$; also ist die Gleichung richtig.

6) $\frac{-a}{-b}=\frac{0-a}{-b}=\frac{0}{-b}-\frac{a}{-b}=(-0)-\left(-\frac{a}{b}\right)=(-0)+\frac{a}{b}=$

$\frac{a}{b}+(-0)=\frac{a}{b}-0=\frac{a}{b}$.

Aus 1 bis 6 ergiebt sich für die Multiplication und Division der positiven und negativen Ausdrücke die Regel:

„Gleiche Zeichen geben Plus und ungleiche Minus."

Beispiele:

1) $(-3).4=-12$.

2) $(-3).(-12)=36$.

3) $\frac{-4}{2}=\frac{4}{-2}=-2$.

4) $\frac{-12}{-6}=+\frac{12}{6}=+2=2$.

5) $a+\frac{-b}{c}=a+\left(-\frac{b}{c}\right)=a-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}$. §. 58.

6) $-a+\frac{-b}{c}=-a+\left(-\frac{b}{c}\right)=-a-\frac{b}{c}=-\left(a+\frac{b}{c}\right)=-\frac{ac+b}{c}$.

7) $(-a)-\frac{-b}{-c}=(-a)-\left(+\frac{b}{c}\right)=(-a)-\frac{b}{c}=-\frac{ac+b}{c}$.

8) $(-a)-\frac{b}{-c}=(-a)-\left(-\frac{b}{c}\right)=\frac{b}{c}+(-a)=\frac{b}{c}-a=\frac{b-ac}{c}$.

9) $\frac{b-d}{-c}=\frac{-(b-d)}{c}=-\frac{b-d}{c}=-\frac{-(d-b)}{c}=--\frac{d-b}{c}=\frac{d-b}{c}$.

10) $-\frac{a+b}{c}=\frac{-(a+b)}{c}=\frac{-a-b}{c}=\frac{a+b}{-c}$.

11) $\frac{b-d}{-c-g}=\frac{b-d}{-(c+g)}=\frac{-(d-b)}{-(c+g)}=\frac{d-b}{c+g}$.

12) $-\frac{a-b}{b-a}=\frac{-(a-b)}{b-a}=\frac{-(a-b)}{-(a-b)}=\frac{a-b}{a-b}=1$.

13) $-\frac{-a-b}{-a}=-\frac{-(a+b)}{-a}=-\frac{a+b}{a}=-\left(1+\frac{b}{a}\right)$.

14) $\frac{am-a}{-a}=\frac{(m-1)a}{-a}=\frac{-a(m-1)}{a}=-\frac{a.(m-1)}{a}=-(m-1)=1-m$.

15) $-\frac{a-am}{a+am}=-\frac{(1-m)a}{(1+m)a}=-\frac{1-m}{1+m}=\frac{-(1-m)}{1+m}=\frac{-(m-1)}{1+m}=\frac{+(m-1)}{1+m}=\frac{m-1}{1+m}$.

16) $\frac{2a-aa}{a-2}=\frac{(2-a)a}{a-2}=\frac{(2-a)a}{-(2-a)}=-\frac{(2-a)a}{2-a}=-a$.

Siebentes Kapitel.

Von den algebraiſchen Summen.

§. 93. Eine Summe von lauter additiven und ſubtractiven Ausdrücken, z. B. $(+a)+(+b)+(+g)+(-f)+(+h)+(-h)$ u. ſ. w., ſchreibt man kürzer: $a+b+g-f+h-h=a+b+g-f+0=a+b+g-f$, und nennt eine ſolche Summe eine algebraiſche, ſo wie die Ausdrücke a, b, f, g, h die Glieder derſelben.

Der Beweis für die Zuläſſigkeit dieſer abgekürzten Schreibart folgt unmittelbar aus den Sätzen 1 und 2 §. 91.

Eine algebraiſche Summe entſteht daher, wenn man additive und ſubtractive Ausdrücke addirt. In dieſem Sinne giebt es nun auch eine algebraiſche Addition, und man ſpricht von einer gewöhnlichen Summe, wenn man dabei die Verbindungsart ganz beliebiger Summanden durch das + Zeichen vor Augen hat, während der Begriff der algebraiſchen Summe ſich nur auf additive und ſubtractive Summanden bezieht.

Vermöge der Sätze 1 und 2 §. 91. können nun auch Summen und Differenzen abſoluter Zahlen, z. B. a+b oder a−b, als algebraiſche Summen betrachtet werden, wenn man ſich dieſelben aus (+a)+(+b) oder aus (+a)+(−b) entſtanden denkt, und es iſt daher ganz gleichgültig, in welcher Bedeutung die vorſtehenden Ausdrücke aufgefaßt werden, denn man hat in beiden Fällen eine und dieſelbe Zahl.

§. 94. Aufgabe. Man ſoll zwei oder mehrere algebraiſche Summen zu einander addiren.

Auflöſung: Man ſchreibe die zu addirenden algebraiſchen Summen mit ihren gleichnamigen Buchſtabenausdrücken unter einander und vereinige letztere nach den Additionsregeln A. §. 91.

Beiſpiele: 1) Es ſollen addirt werden: (3a−2b−4c+d)+(−a++3b−d−p+q+2n−3c).

Rechnung: 3a−2b−4c+d
−a+3b−3c−d−p+q+2n
2a+b−7c+0−p+q+2n=2a+b−7c+2n−p+q.

2) (a+b−5+3g)+(5a−6+c+g)+(12−7a−b−4g−c).

Rechnung: a+b+3g−5
5a+g−6+c
−7a−b−4g+12−c
−a+0+0+1+0=−a+1=1−a.

3) 3a+b−c
2a−b+c+3d
+5b−3c−4g
5a−2b−10c+g
−8a−4d+3g
+b−6c

Nimmt man zuerſt die poſitiven und ſodann auch die negativen Summanden zuſammen, ſo iſt:

+10a+7b+c+3d+4g
−8a−3b−20c−4d−4g

addirt, giebt

2a+4b−19c−d als Summenwerth.

4) $x+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}$ Es ist: 1) $x+\frac{3x}{2}=\frac{2x+3x}{2}=\frac{5x}{2}$.

$\frac{3x}{2}-\frac{2y}{5}-\frac{z}{6}$ 2) $\frac{y}{3}-\frac{2y}{5}=\frac{5y-6y}{15}=\frac{-(6y-5y)}{15}=-\frac{y}{15}$.

$\frac{5x}{2}-\frac{y}{15}+\frac{z}{3}$. 3) $\frac{z}{2}-\frac{z}{6}=\frac{3z}{6}-\frac{z}{6}=\frac{3z-z}{6}=\frac{2z}{6}=\frac{z}{3}$.

5) $(m-2n+v+z)+(-2m-4n-2v+3z)+\left(-\frac{m}{2}+\frac{3}{4}n+\right.$
$\left.-5v-\frac{3}{5}z\right)=-\frac{3m}{2}-\left(5n+\frac{n}{4}\right)-6v+\frac{17z}{5}$.

6) $(120aa-30c-m+36n+5a)+(3m-20c-100aa-3a-15n)+$
$(6c+6a+9n-4m-8aa)=12aa+8a-44c-2m+30n$.

7) $-2{,}95x-3{,}6xy+19xz+5z-12{,}101xyz+5xz-5z+15{,}3+$
$+30-14{,}289xyz-2{,}225xy+x-3{,}95x-1{,}375xy+24xz+$
$+2{,}188xyz-14{,}7=-5{,}9x-7{,}2xy+48xz-24{,}202xyz+30{,}6$.

8) $\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=b$.

9) $\frac{3a-4b}{7}-\frac{2a-b-c}{3}+\frac{15a-4c}{12}=\frac{3a-4b}{7}+\frac{-(2a-b-c)}{3}+$
$+\frac{15a-4c}{12}=\frac{85a-20b}{84}$.

10) $\frac{1+2x}{(3-x)(1+x)}+\frac{7}{(2+x)(1-3x)}+\frac{x}{(1+x)(2+x)}=$
$\frac{23+16x-30xx-3xxx}{(3-x)(1+x)(2+x)(1-3x)}$.

11) $\frac{a}{5}-\frac{b}{3}-\frac{c}{2}+\frac{3a}{2}-\frac{b}{4}+\frac{c}{3}=\frac{17a}{10}-\frac{7b}{12}-\frac{c}{6}$.

12) $\left(\frac{a}{2}+b+\frac{3}{4}c\right)+\left(-6a+\frac{c}{4}+2b\right)+\left(\frac{3a}{2}-3b-\frac{c}{2}\right)=$
$\frac{1}{2}(c-8a)$.

§. 95. **Aufgabe.** Man soll eine algebraische Summe von einer andern algebraischen Summe subtrahiren.

Auflösung: Man schreibe die Summe des Subtrahendus unter die des Minuendus, so daß die gleichnamigen Summanden unter einander zu stehen kommen. Hierauf ändere man die Vorzeichen im Subtrahendus und addire nach §. 94; z. B.:

1) $(a-4b+2c-d+5)-(-3a+5b+2c-d+7)$.

Rechnung:
$$\begin{array}{r} a-4b+2c-d+5 \\ -3a+5b+2c-d+7 \\ + \quad - \quad - \quad + \quad - \\ \hline 4a-9b+0+0-2=4a-9b-2. \end{array}$$

Beweis: Man hat in der vorſtehenden Auflöſung, nach dem allgemeinen Subtractionsgeſetze §. 22. N. VII, jeden Summanden des Subtrahendus nach und nach ſubtrahirt, und gleichzeitig die Regel B §. 91 in Anwendung gebracht, weil die zu ſubtrahirenden Summanden additive und ſubtractive Ausdrücke ſind; mithin iſt die Auflöſung übereinſtimmend mit den Subtractionsgeſetzen geſchehen, und deßhalb richtig.

2) $(3a-b+2c-5d)-(3a-3b-4c+9d)-(2b+6c)=-14d.$

Rechnung:
$$\begin{array}{r} 3a-b+2c-5d \\ -3a+3b+4c-9d \\ \quad -2b-6c \\ \hline 0+0+0-14d=-14d. \end{array}$$

3) $(7a+b-3+10-7a+b)-(5a+3+b)=b+4-5a=$
$-[5a-(b+4)].$

4) $4a-4c-[6a-(3b-4c)-3d]=4a-4c-6a+(3b-4c)+3d=$
$$\begin{array}{r} 4a+3b-4c+3d \\ -6a\quad -4c \\ \hline =-2a-8c+3(b+d). \end{array}$$

5) $9a-20c+12b-4a-2b-[3a-10c-(6c-10b)]-2a+4c=0.$

6) $(a+b)-(a-b)=2b.$

7) $(a-b)-(a+b)=-2b.$

8) $a+b-(2a-3b)-(5a+7b)-(-13a+2b)=7a-5b.$

9) $-[5a+4b-(-3c-(10-a))]-(3d+g)=$
$-5a-4b+[-3c-(10-a)]-3d-g=$
$-5a-4b-3c-10+a-3d-g=$
$-4a-4b-3c-3d-g-10.$

10) $(8bb-16c+8ab-15+7d-20ab+15c-bb-5e-7a+8bb+$
$-9ab-6c)-(27ab-11+9e-7c+5c-6ab+35d-3e+$
$-7bb+7a+11)=22bb-(5c+42ab+15+28d+11e+14a).$

11) $-[5ab-6c+24bb-36-(25bb-10)]-7a+8bb-9ab-6c+$
$+5c-6ab+35d-3e-7bb+7a+11-(-20ab+15c-bb+$
$-5a)=3bb-10c+35d+2e+37+5a.$

12) $\left(\frac{2c}{3}+4b-3c+b\right)-\left(\frac{2c}{3}+2b+3c-8\right)-\left(\frac{b}{2}+\frac{c}{3}-\frac{2}{3}\right)=$
$\frac{3b}{2}-\frac{19c}{3}+\frac{26}{3}.$

§. 96. **Aufgabe.** Man ſoll zwei algebraiſche Summen mit einander multipliciren.

Auflöſung: Man multiplicire jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der andern, und gebe den einzelnen Productenwerthen das entſprechende Vorzeichen nach

der Regel des §. 92. Zuletzt vereinige man sämmtliche Productenwerthe nach der Additionsregel A. §. 91; z. B.:

1) $(a-b)\,(a-b) = aa-2ab+bb$.

Rechnung:
$$\begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline aa-ab \\ -ab+bb \\ \hline aa-2ab+bb \end{array}$$

Beweis: Nach dem allgemeinen Multiplicationsgesetze §. 32. N. IV und V ist jeder Summand der einen Summe mit jedem Summanden der anderen Summe multiplicirt, und hierbei, da man es mit additiven und subtractiven Ausdrücken zu thun hatte, die Regel des §. 92 in Anwendung gebracht worden. Die bewirkte Auflösung ist also übereinstimmend mit den Multiplications-Gesetzen geschehen, und deshalb richtig.

2) $$\begin{array}{r} aa-2ab+bb \\ a-b \\ \hline aaa-2aab+abb \\ -aab+2abb-bbb \\ \hline aaa-3aab+3abb-bbb. \end{array}$$

3) $(2a-5b+3c)\,(3a+5b-4c) = 6aa-5ab+ac-25bb+35bc-12cc$.

4) $(a+b+c)\,(a+b-c) = aa+2ab+bb-cc$.

5) $(3b-2a-c)\,(-7a+c-3f) = 14aa-21ab+5ac+3bc-cc+6af-9bf+3cf$.

6) $(-a-2b+c)\,(-a+b-3c) = aa+ab+2ac-2bb+7bc-3cc$.

7) $\left(\frac{a}{2}-\frac{3c}{4}+d\right)\left(\frac{a}{3}-\frac{c}{5}\right) = \frac{aa}{6}-\frac{7ac}{20}+\frac{ad}{3}+\frac{3cc}{20}-\frac{cd}{5}$.

Rechnung:
$$\begin{array}{r} \frac{a}{2}-\frac{3c}{4}+d \\ \frac{a}{3}-\frac{c}{5} \\ \hline \frac{aa}{6}-\frac{ac}{4}+\frac{ad}{3} \\ -\frac{ac}{10}+\frac{3cc}{20}-\frac{cd}{5} \\ \hline \frac{aa}{6}-\frac{7ac}{20}+\frac{ad}{3}+\frac{3cc}{20}-\frac{cd}{5}. \end{array}$$

8) $\left(\frac{ax}{b}-\frac{by}{c}+d\right)\left(5a-b\right) = \frac{5aax}{b}-\frac{5aby}{c}+5ad-ax+\frac{bby}{c}+-bd$.

9) $\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{d}+\frac{c}{e}\right)\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{d}\right)=\frac{aa}{cc}-\frac{2ab}{cd}+\frac{a}{e}+\frac{bb}{dd}-\frac{bc}{de}$.

10) $\left(3a-5b+\frac{3c}{4}\right)\left(a+\frac{b}{2}-2c\right)=3aa-\frac{7ab}{2}-\frac{21ac}{4}-\frac{5bb}{2}+$
$+\frac{83bc}{8}-\frac{3cc}{2}$.

11) $\left(\frac{2a}{3}-\frac{3b}{4}+c\right)\left(3a-\frac{7b}{2}+\frac{c}{3}\right)=2aa-\frac{55ab}{12}+\frac{29ac}{9}+$
$+\frac{21bb}{8}-\frac{15bc}{4}+\frac{cc}{3}$.

12) $\left(\frac{a}{2}+\frac{3b}{5}-\frac{c}{6}\right)\left(\frac{4a}{3}-\frac{5b}{4}-2c\right)=\frac{2aa}{3}+\frac{7ab}{40}-\frac{11ac}{9}-\frac{3bb}{4}+$
$-\frac{119bc}{120}+\frac{cc}{3}$.

§. 97. **Aufgabe.** Man ſoll algebraiſche Summen durch einander dividiren.

Auflöſung: I. Iſt eine algebraiſche Summe durch einen einfachen Ausdruck zu dividiren, ſo dividire man jeden Summanden nach dem allgemeineren Diviſionsgeſetze durch denſelben, §. 39 IV, und berückſichtige hierbei, in Bezug auf die Vorzeichen, die Regel des §. 92; z. B.:

1) $\frac{-a+b-c-3}{-a}=1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{3}{a}$.

2) $(-6abc-7b+9ac-5d):(-5a)=\frac{6}{5}bc+\frac{7b}{5a}-\frac{9c}{5}+\frac{d}{a}$.

3) $\left(\frac{m}{2}-\frac{3a}{4}+4b-\frac{c}{5}\right):(-m)=-\frac{1}{2}+\frac{3a}{4m}-\frac{4b}{m}+\frac{c}{5m}$.

4) $\left(\frac{2aa}{3bb}-\frac{7ab}{9cd}+1-\frac{5}{8}d\right):\left(-\frac{7a}{3b}\right)=-\frac{2a}{7b}+\frac{bb}{3cd}-\frac{3b}{7a}+\frac{15bd}{56a}$.

II. Iſt der Diviſor ſelbſt eine algebraiſche Summe, ſo wende man das ſpeciellere Diviſionsgeſetz an, und verfahre, mit Berückſichtigung der Regel §. 92, ganz wie im §. 41 N. 8. bereits angegeben wurde; z. B.:

5) $(a^2-2ab+b^2):(a+b)=a-b$.

Rechnung:

$a-b$	$aa-2ab+bb$	$a-b$ Quotientenwerth.
	$aa-\ ab$	
	$-\quad+$	
	$-ab+bb$	
	$-ab+bb$	
	$+\quad-$	
	0	

6) $3a-5c \mid 6aa+9ab-22ac-15bc+20cc \mid 2a+3b-4c.$

$6aa \quad -10ac$

$9ab-12ac-15bc+20cc$

$9ab \quad -15bc$

$-12ac \quad +20cc$

$-12ac \quad +20cc$

0

7) $(aaaa-9aabb-6abcc-cccc):(aa-3ab-cc)=aa+3ab+cc.$

8) $(aa+ab+2ac-2bb+7bc-3cc):(a+2b-c)=a-b+3c.$

9) $12aa+26ab-36ac+18ad-10bb+29bc-6bd-21cc+9cd):(6a-2b+3)=2a+5b-7c+3d.$

10) $\left(\frac{xxxx}{3}-\frac{11xxx}{12}+\frac{41xx}{8}-\frac{23x}{4}+6\right):\left(\frac{2xx}{3}-\frac{5x}{6}+1\right)=\frac{xx}{2}-\frac{3x}{4}+6.$

11) $\left(\frac{3aa}{8}-\frac{17ab}{4}+\frac{107acc}{12}+10bb-\frac{88bcc}{3}-2cccc\right):\left(\frac{a}{4}+-2b+6cc\right)=\frac{3a}{2}-5b-\frac{cc}{3}.$

12) $\left(3aa-\frac{7ab}{2}-\frac{21ac}{4}-\frac{5bb}{2}+\frac{83bc}{8}-\frac{3cc}{2}\right):\left(a+\frac{b}{2}+-2c\right)=3a-5b+\frac{3c}{4}.$

13) $\left(\frac{5aax}{b}-\frac{5aby}{c}+5ad-ax+\frac{bby}{c}-bd\right):\left(\frac{ax}{b}-\frac{by}{c}+d\right)=5a-b.$

14) $\frac{1}{1-a}=1+a+aa+aaa+aaaa+aaaaa+\frac{aaaaaa}{1-a}.$

Rechnung: $1-a \mid 1 \mid 1+a+aa+aaa+aaaa+aaaaa+\frac{aaaaaa}{1-a}$

$+1-a$

$+a$

$+a-aa$

$+aa$

$+aa-aaa$

$+aaa$

$+aaa-aaaa$

$+aaaa$

$+aaaa-aaaaa$

$+aaaaa$

$+aaaaa-aaaaaa$

$+aaaaaa$

In dieſem Beiſpiele wird der jedesmal zuletzt erhaltene Reſt immer zuſammengeſetzter, ſo daß auch die Diviſion nie aufgehen, ſondern bis ins Unendliche fortgeſetzt werden kann. Man erhält daher bei fortgeſetzter Diviſion eine unendliche Reihe von Summanden. Gewöhnlich nimmt man im Quotientenwerthe von dieſen Summanden nur einige, und drückt die fehlenden durch Punkte aus; z. B.:

15) $\frac{1}{1+a} = 1 - a + aa - aaa + aaaa - aaaaa + \ldots$

IV. Abſchnitt.

Von dem ſogenannten Ausziehen der Wurzeln.

Achtes Kapitel.

Vom Ausziehen der Quadratwurzeln.

§. 98. Hat man ein Product von lauter gleichen Factoren, z. B. a. a. a. a. . . . . n mal als Factor, ſo ſchreibt man dafür kürzer a^n (geleſen a hoch n, oder a in der nten Potenz) und nennt ein ſolches Zeichen eine Potenz, ſo wie a den Dignanden, und n den Exponenten derſelben.

Eine Potenz bezeichnet daher die Zahl, welche entſteht, wenn man den Dignanden ſo oft als Factor nimmt, als der Exponent Einheiten enthält, und Potenziren heißt eine Zahl ſo oft als Factor nehmen, als eine andere gegebene Zahl anzeigt.

Die zweite Potenz von a, alſo $a^2 = a.a$, nennt man insbeſondere das Quadrat von a, und die dritte Potenz von a, d. i. $a^3 = a.a.a$, den Kubus von a.

Für die Rechnung mit Potenzen mögen hier bloß folgende zwei Geſetze bemerkt werden.

I. $(ab)^m = a^m . b^m$. In Worten: „Ein Product wird mit einer Zahl potenzirt, wenn man jeden Factor mit derſelben potenzirt;“ oder von der Rechten zur Linken geleſen: „Potenzen mit gleichen Exponenten werden mit einander multiplicirt, wenn man die Dignanden mit einander multiplizirt und ihr Product mit dem gemeinſchaftlichen Exponenten potenzirt.“

Auf gleiche Weise findet man:

1) $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$. nach §. 99 Erklärung.
2) $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$.
3) $\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$.
4) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$.
5) $\sqrt{8} = \sqrt{2.2^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2^2} = 2.\sqrt{2}$ nach §. 99. I.
6) $\sqrt{48} = \sqrt{16.3} = \sqrt{4^2.3} = \sqrt{4^2}.\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.
7) $\sqrt{1} = 1$.
8) $\sqrt[3]{1} = 1$.

§. 101. Nicht immer kann man den Werth einer Wurzel, wie solches in den Beispielen 1 bis 4 des vorigen §. der Fall war, sogleich mit Hülfe der Wurzelerklärung angeben, sondern man muß sich hierbei eines Verfahrens bedienen, welches das Ausziehen der Wurzeln genannt wird.

Dieses Verfahren gründet sich bei Quadratwurzeln auf die Formel $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, indem man nämlich jede numerische Zahl als das Quadrat eines zweitheiligen Ausdruckes betrachtet, welches demnächst die Theile $a^2+2ab+b^2$ enthalten muß. Um den Zusammenhang dieser Theile in einer numerischen Zahl nachzuweisen, wollen wir zuvörderst folgende Aufgabe stellen.

§. 102. Aufgabe. Es soll eine zweiziffrige numerische Zahl, z. B.: 34, mittelst der Formel $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ zum Quadrat erhoben und nachgewiesen werden, in welcher Verbindung die Theile $a^2+2ab+b^2$ in dem Quadrate dieser Zahl stehen.

$$(a.10+b)^2 = a^2.100+2ab.10+b^2$$

Auflösung: $34^2 = (3.10+4)^2 = 9.100+2.3.10.4+16.$

Man hat also:

$$a^2.100 = 900$$
$$2ab.10 = 240$$
$$b^2 = 16$$
$$34^2 = (3.10+4)^2 = 1156.$$

Setzt man in dem obigen Beispiele a=3, indem man sich die weggelassene 10 bloß hinzudenkt, und rückt demnächst jeden der beiden Summanden 2ab und b^2 um eine Ziffer zur Rechten heraus, so erhält man dasselbe Resultat, nämlich:

$$a^2 = 9$$
$$2ab = 24$$
$$b^2 = 16$$
$$34^2 = 11|56.$$

Schneidet man hierauf von der erhaltenen Quadratzahl 1156 zwei Ziffern (Klassen genannt) von der Rechten zur Linken ab, so ist:

1, in der Klasse zur Linken, also in 11, das Quadrat des ersten Theiles, nämlich $a^2=9$ enthalten.

2, das doppelte Product des 1ten Theils in den 2ten, nämlich 2ab, erstreckt sich bis in 5, d. h. bis in die erste Stelle der 2ten Klasse.

Mittelst dieser Bemerkungen ist man nun im Stande, aus jeder gegebenen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen, indem man dieselbe als das Quadrat eines zweitheiligen Ausdrucks, welches demnächst die Theile $a^2+2ab+b^2$ enthalten muß, betrachtet.

§. 103. Für jede ein- oder zweiziffrige Zahl, sowie für die zweiten Potenzen von 10, 100, 1000 u. s. w. findet man den vollständigen oder nächst kleineren Wurzelwerth unmittelbar aus folgender Wurzeltafel:

$a^2=1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 100^2, 1000^2, 10000^2$ u. s. w.

$a^2=1,\ 4,\ 9,\ 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 10000, 1000000, 100000000.$

$\sqrt{a^2}=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 100,\ 1000,\ 10000.$

Aus dieser Wurzeltafel ist zugleich ersichtlich, daß die genaue oder zunächst kleinere Wurzel jeder 3 oder 4ziffrigen Zahl, zweiziffrig, und jeder 5 oder 6ziffrigen Zahl 3 ziffrig u. s. w. sein muß, weil die Wurzel aus 100, als der kleinsten 3 ziffrigen Zahl, eine zweiziffrige Zahl, nämlich 10, und die Wurzel aus 10000, als der kleinsten fünf ziffrigen Zahl, =100 ist. Die Wurzelwerthe aller drei- bis vierziffrigen Zahlen, die also zwischen 100 und 10000 fallen, können daher nur zweiziffrig sein.

§. 104. Aufgabe. Man soll die Quadratwurzel, mittelst der Formel $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, aus 1156 ziehen.

Auflösung: Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen zu zwei Ziffern ab. Alsdann ist in der Klasse links, nach §. 102, der erste Theil der Wurzel enthalten. Aus der Wurzeltafel nimmt man nun, da $\sqrt{11}$ nicht darin vorkommt, die zunächst kleinere Wurzel, nämlich $\sqrt{9}$, welche die erste Ziffer des Wurzelwerthes, nämlich $a=3$, giebt.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{11}\,56 = \overset{a}{3}4. \\ \hline 9 \\ \hline 25.6. \end{array}$$

Zieht man hierauf $a^2=9$ von 11 ab, so bleibt, mit Hinzuziehung der nächsten Klasse, 256 als Rest übrig, und dieser Rest muß noch die Theile: $2ab+b^2$ enthalten. Da sich nun ferner der Summand 2ab bis in die 1te Ziffer der heruntergerückten Klasse erstreckt, §. 102, so kann die Zahl 25 für 2ab angesehen werden, und es findet sich demnächst der 2te Theil der Wurzel $b=4$, wenn man mit $2a=6$ in 25 dividirt. Bildet man hierauf die numerische Zahl, welche der

Summe $2ab+b^2$ entspricht, so erhält man 256, und diese Zahl von dem obigen Reste abgezogen läßt 0 übrig, woraus folgt, daß 4 die zweite Ziffer des Wurzelwerthes, und 34 die gesuchte Zahl ist, welche der $\sqrt{1156}$ vollständig entspricht.

Für das practische Rechnen ist es bequem, die Summe $2ab+b^2$ in das Product $(2a+b).b$ umzuformen, und man schreibt alsdann in dem obigen Beispiele für: $(6.10+4)4$ kürzer 64.4. Die Rechnung selbst wird zur bessern Uebersicht in folgender Art ausgeführt:

$$\begin{array}{rl} & \quad ab \\ \sqrt{11|56} & = 34. \\ a^2 = 9| & \\ \hline 2a = 6: 25.6 & \\ (2a+b)b = 64.4 = 256 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Die Probe für die Richtigkeit der Rechnung besteht in der Multiplication des gefundenen Wurzelwerthes mit sich selbst, wobei der Radikand wieder zum Vorschein kommen muß, wenn die Rechnung richtig geführt worden ist. §. 99. Erklärung.

§. 105. **Aufgabe.** Es soll aus einer 5 bis 6 ziffrigen Zahl die Quadratwurzel, z. B. aus der Zahl 36845, gezogen werden.

Auflösung: Man kann sich die gesuchte Quadratwurzel aus der Zahl 36845 wiederum in der Form $a.10+b$ denken, nur daß alsdann a selbst schon eine zweiziffrige Zahl sein muß, weil die Zahl 36845 zwischen 10000 und 100000 liegt, und also ihre Wurzel 3ziffrig ist.

Schneidet man daher von 36845 zwei Ziffern zur Rechten ab, so ist zunächst die Wurzel aus 368 nach der vorigen Aufgabe zu ziehen, und man findet dafür die Zahl 19. Hierauf betrachtet man die beiden gefundenen Ziffern, nämlich 19, wiederum als a, wofür wir a′ schreiben wollen, und bestimmt dazu den neuen 2ten Theil der Wurzel b′. Insofern aber $a'^2 = 19^2 = 361$, durch die bewerkstelligte Subtraction der Summe $a^2+2ab+b^2$ schon abgezogen ist, so wird auch der Rest 745 nur noch die Theile $2a'b'+$ $+b'^2$ enthalten können, und der neue zweite Theil der Wurzel, nämlich $b'=1$ dadurch gefunden werden, daß man mit $2a'=2.19=38$ in 74 dividirt.

$$\text{Rechnung: } \begin{array}{rl} & \quad a'b' \\ \sqrt{3|68|45} & = 191 \\ a^2 = 1| \quad | & \\ \hline 2a = 2: 26.8 & \\ (2a+b)b = 29.9 = 261 & \\ 2a' = 2.19 = 38: \quad 74.5 & \\ (2a'+b')b' = 381.1 = 381 & \\ \hline 364 & \end{array}$$

Da in dem vorstehenden Beispiele, nachdem die 3 Ziffern der Wurzel gefunden worden waren, noch ein Rest blieb, so hat man in der Zahl 191 auch nur einen Näherungswerth für $\sqrt{36845}$ und man muß alsdann bei der Probe zu 191^2 noch den Rest 364 addiren, um den Radicanden zu erhalten; also

$$191^2 + 364 = 36845.$$

Anmerkung: Wurzeln, deren Werthe sich vollständig ausdrücken lassen, werden rationale, und dagegen solche, die sich nur annäherungsweise berechnen lassen, irrationale genannt.

§. 106. Aufgabe. Man soll aus einer 7 bis 8ziffrigen Zahl die Quadratwurzel ziehen, z. B. aus 1034592.

Auflösung: Man schneide von der gegebenen Zahl zwei Ziffern zur Rechten ab, und suche zu den 5 Ziffern zur Linken, nämlich zu 10345, die drei ersten Ziffern der Wurzel nach §. 105. Hierauf betrachte man die gefundenen 3 Ziffern wiederum als a″ und bestimme dazu aufs Neue b″.

$\sqrt{1|03|45|92} = 1017.$

$a^2 = 1$

$2a' = 20 : 0.34.5$

$(2a' + b')b' = 201.1 = 201$

$2a'' = 202 : 1449.2$

$(2a'' + b'')b'' = 2027.7 = 14189$

303

In dem vorstehenden Beispiele war die 1ste Ziffer der 2ten herunter gesetzten Klasse eine 0, daher auch $b = 0$, und $2ab + b^2 = 0$. Man rückt alsdann die nächste Klasse herunter und setzt für b in dem Wurzelwerthe eine 0.

§. 107. Aufgabe. Man soll aus einer 9 bis 10 ziffrigen Zahl die Quadratwurzel ziehen z. B. aus 7403569936.

Auflösung: Man schneide von der gegebenen Zahl zur Rechten zwei Ziffern ab, und suche für die Ziffern zur Linken die Wurzel nach §. 106. Hierauf nehme man die gefundenen 4 ersten Ziffern der Wurzel als a an, und bestimme dazu wiederum b als 5te Ziffer.

Rechnung: $\sqrt{74|03|56|99|36} = 86044.$

64

16 : 100.3

166.6 = 996

1720 : 75.69.9

17204.4 = 68816

17208 : 688336

172084.4 = 688336

0

$\sqrt{285970396644} = 534762.$

$\sqrt{12088868379025} = 3476905.$

§. 108. **Aufgabe.** Man soll die Quadratwurzel aus einer Zahl, welche kein vollständiges Quadrat ist, annähernd durch einen Dezimalbruch ausdrücken z. B. die Quadratwurzel aus 1415 bis auf zwei Dezimalstellen genau.

Auflösung: Man hänge dem Radicanden doppelt soviel Nullen an, als man Dezimalstellen haben will, und dividire denselben gleichzeitig wieder durch eine 1 mit ebenso vielen angehängten Nullen. Hierauf ziehe man die Wurzel aus dem Zähler und Nenner. §. 99. II.

Es ist also: $\sqrt{1415} = \sqrt{\frac{14150000}{10000}} = \frac{\sqrt{14150000}}{\sqrt{100^2}} = \frac{\sqrt{14150000}}{100} = \frac{3761\ldots}{100} = 37{,}61\ldots$

Bemerkungen: 1, Beim practischen Rechnen hängt man die Nullen gewöhnlich erst dann an, wenn die Wurzel aus der gegebenen Zahl gezogen ist, und setzt das Komma, sobald das erste Paar Nullen angehängt wird.

1) $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$
2) $\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$
3) $\sqrt{5} = 2{,}2360679\ldots$
4) $\sqrt{7} = 2{,}6457513\ldots$
5) $\sqrt{11} = 3{,}3166247\ldots$
6) $\sqrt{13} = 3{,}6055512\ldots$

2, Je mehr Klassen von Nullen angehängt werden, um so mehr nähert man sich dem wahren Werthe der Wurzel, ohne jedoch die Wurzel je genau finden zu können, insofern durch das Anhängen von Nullen der Wurzelwerth in einen Bruch übergeht, und ein Bruch mit irgend einer Zahl potenzirt nie eine ganze Zahl werden kann.

3, Decimalbrüche, welche irrationale Wurzeln näherungsweise ausdrücken, können nie periodisch sein, weil periodische Dezimalbrüche gewöhnlichen Brüchen gleich sind, irrationale Wurzeln aber weder durch ganze noch gebrochene Zahlen vollständig ausgedrückt werden können.

§. 109. **Aufgabe.** Man soll aus einem Decimalbruche die Quadratwurzel ziehen.

Auflösung: Man ziehe die Wurzel aus dem Zähler und Nenner nach §. 99. II und hänge dem Dezimalbruch, wenn die Anzahl der Dezimalstellen ungerade ist, eine Null an, damit die Wurzel aus dem Nenner rational wird, z. B.:

$\sqrt{0{,}00789} = \frac{\sqrt{7890}}{\sqrt{1000000}} = \frac{\sqrt{7890}}{1000} = \frac{88\ldots}{1000} = 0{,}088\ldots.$

$\sqrt{16{,}5625} = \frac{\sqrt{165625}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{165625}}{100} = 4{,}06\ldots.$

Aus dem vorstehenden Verfahren folgt die practische Regel:

„Man theile, vom Dezimalstrich ab, die Ganzen von der Rechten zur Linken und die Dezimalstellen von der Linken zur Rechten in Klassen ab, und ergänze die letzte Klasse der Dezimalstellen, wenn dieselbe nur einziffrig sein sollte, durch eine Null. Hierauf ziehe man die Wurzel wie gewöhnlich aus, und setze das Komma im Wurzelwerthe, sobald die Wurzel aus den Ganzen gezogen worden ist.“

1) $\sqrt{1|03,|00|45|60|} = 10{,}149116\ldots$
2) $\sqrt{4414{,}91120257} = 66{,}4447\ldots$
3) $\sqrt{6{,}623413723560} = 2{,}573599\ldots$
4) $\sqrt{4{,}576579629720} = 2{,}171769\ldots$
5) $\sqrt{0{,}999999832668045} = 0{,}9999999\ldots$
6) $\sqrt{0{,}00000016733195} = 0{,}0004090\ldots$

§. 110. Man soll aus einem gewöhnlichen Bruche die Quadratwurzel ziehen.

Die Auflösung kann auf zweifachem Wege geschehen, und zwar:

1. Man ziehe die Wurzel aus dem Zähler und Nenner und dividire die Wurzelwerthe durch einander. Diese Auflösung ist nur dann zu empfehlen, wenn sich die Wurzelwerthe des Zählers und Nenners sogleich erkennen lassen.
2. Man verwandle den gegebenen Bruch in einen Dezimalbruch, und ziehe daraus die Wurzel nach §. 109. Diese Auflösung wird gewöhnlich angewendet.

Beispiele: 1) $\sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt{4^2}}{\sqrt{9^2}} = \frac{4}{9}$.

2) $\sqrt{\frac{100}{144}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

3) $\sqrt{\frac{1}{17}} = \sqrt{0{,}0588235294\ldots} = 0{,}24253\ldots$.

4) $\sqrt{\frac{7}{8}} = 0{,}93541\ldots$.

5) $\sqrt{5\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{23}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{23} = 2{,}397916\ldots$.

6) $\sqrt{1\frac{5}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{14} = 1{,}247219\ldots$.

Neuntes Kapitel.

Vom Ausziehen der Kubikwurzeln.

§. 111. Erhebt man eine zweiziffrige Zahl, z. B. 43, mittelst der Formel $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ zum Kubus, so ergiebt sich Folgendes:

$$(a.10+b)^3 = a^3.1000 + 3a^2.100.b + 3a.10.b^2 + b^3.$$

$$43^3 = (4.10+3)^3 = 4^3.1000 + 3.4^2.100.3 + 3.4.10.3^2 + 3^3;$$

oder: $a^3 = 4^3.1000 = 64000.$

$3a^2b = 3.\ 1600.3 = 14400.$

$3ab^2 = 3.\ 40.9 = 1080.$

$b^3 = 3^3 = 27.$

$43^3 = 79507.$

Setzt man aber $a=4$, indem man sich die 10 bloß hinzudenkt, und rückt jeden der Summanden $3a^2b$, $3ab^2$, und b^3 um eine Stelle zur Rechten heraus, so erhält man dasselbe Resultat, nämlich:

$a^3 = 64$	
$3a^2b = 14$	4
$3ab^2 = 1$	08
$b^3 =$	27
$43^3 = 79$	507.

Schneidet man hierauf von 79507 drei Ziffern von der Rechten zur Linken ab, so bemerkt man:

1. Daß in der Klasse zur Linken (79) der Kubus des ersten Theils, nämlich $a^3 = 64$ enthalten ist, und
2. Daß sich das dreifache Quadrat des ersten Theils in den 2ten bis in die erste Ziffer der 2ten Klasse erstreckt.

Mittelst dieser Bemerkungen ist man im Stande, aus jeder gegebenen Zahl die Kubikwurzel zu ziehen, indem man dieselbe als den Kubus eines zweitheiligen Ausdrucks, welcher die Theile $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ enthalten muß, betrachtet.

§. 112. Für jede 1 bis 3ziffrige Zahl, so wie für jede 3te Potenz von 10, 100, 1000 u. s. w. findet man die vollständige oder die nächst kleinere Kubikwurzel aus nachstehender Wurzeltafel:

$a^3 = 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3, 10^3, 100^3$, u. s. w.

$a^3 = 1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216,\ 343,\ 512,\ 729,\ 1000,\ 1000000, \ldots.$

$a = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 100, \ldots.$

Aus dieser Wurzeltafel ergiebt sich zugleich, daß die Kubikwurzel aus jeder 4 bis 6 ziffrigen Zahl zweiziffrig, aus jeder 7 bis 9ziffrigen

Zahl dreiziffrig, und aus jeder 10 bis 12 ziffrigen Zahl vierziffrig sein muß.

§. 113. Aufgabe. Man soll die Kubikwurzel aus 79507 ziehen.

Auflösung: Man schneide von der Rechten zur Linken 3 Ziffern ab, so enthält, nach §. 111., die Klasse links, welche auch ein-, zwei- oder dreiziffrig sein kann, den Kubus des ersten Theils der Wurzel. Aus der Wurzeltafel nimmt man nun anstatt $\sqrt[3]{79}$ die $\sqrt[3]{64} = 4$, weil die Zahl 79 auch noch die Einheiten enthält, welche bei der Addition von $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ zu a^3 mit hinzugezählt wurden.

$$\sqrt[3]{79|507} = \begin{matrix} ab \\ 43. \end{matrix}$$
$$\begin{array}{r} 64 \\ \hline 155.07 \end{array}$$

Hierauf zieht man $a^3 = 64$ von 79 ab, und der Rest 15507 muß noch die Theile $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ enthalten. (§. 111.). Da sich nun ferner der Summand $3a^2b$ bis in die 1te Ziffer der heruntergerückten Klasse erstreckt, also die Zahl 155 für $3a^2b$ angesehen werden kann, so findet sich b, wenn man mit $3a^2 = 48$ in 155 dividirt; dies giebt $b = 3$. Bildet man hierauf die numerische Zahl, welche der Summe $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ entspricht, so erhält man 15507, und diese Zahl, vom obigen Reste abgezogen, läßt 0 übrig, woraus folgt, daß 3 die 2te Ziffer der Wurzel, und 43 die gesuchte Zahl ist, welche der $\sqrt[3]{79507}$ vollständig entspricht.

Die Rechnung selbst kommt der bessern Uebersicht wegen gewöhnlich in folgender Art zu stehen:

$$\sqrt[3]{79|507} = \begin{matrix} ab \\ 43. \end{matrix}$$

$a^3 = 64$		$3a^2b = 144$
$3a^2 = 48 : 15507$		$3ab^2 = 108$
15507		$b^3 = 27$
0		15507

$$\sqrt[3]{175616} = 56.$$

§. 114. Aufgabe. Man soll aus einer 7 bis 9 ziffrigen Zahl die Kubikwurzel ziehen, z. B. aus 14706125.

Auflösung. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen zu 3 Ziffern ein, und suche zu den beiden ersten Klassen die Wurzel nach der vorigen Aufgabe. Hierauf betrachte man die gefundenen beiden ersten Ziffern der Wurzel als a', so wird der übrig gebliebene Rest, da a'^3 bereits abgezogen ist, noch die Theile $3a'^2b' + 3a'b'^2 + b'^3$ enthalten müssen und es ergiebt sich

der neue zweite Theil der Wurzel, nämlich b', analog dem früheren Verfahren. Hiernach kommt die Rechnung wie folgt zu stehen:

$$\sqrt[3]{14|706|125} = \begin{matrix} a'b' \\ 245. \end{matrix}$$

$a^3 = 8$

$3a^2 = 12 : 67.06$ (58 24)

$3a'^2 = 1728 : 8821.25$ (8821 25)

0

$3a^2b = 48$ $\quad 3a'^2b' = 8640$

$3ab^2 = 96$ $\quad 3a'b'^2 = 1800$

$b^3 = 64$ $\quad b'^3 = 125$

5824 $\quad 882125$

1) $\sqrt[3]{485587656} = 786$. 3) $\sqrt[3]{988047936} = 996$.

2) $\sqrt[3]{259694072} = 638$. 4) $\sqrt[3]{997002999} = 999$.

§. 115. Man soll aus einer 10 bis 12 ziffrigen Zahl die Kubikwurzel ziehen.

Auflösung. Man theile wiederum die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen zu 3 Ziffern ab, und bestimme zu den drei ersten Klassen die Wurzel nach der vorigen Aufgabe. Hierauf nehme man die gefundenen 3 ersten Ziffern der Wurzel als a'' an und suche dazu, ganz auf die frühere Art, den neuen 2ten Theil der Wurzel b''. Z. B.:

$$\sqrt[3]{115|145|914|625} = \begin{matrix} a'' \\ a'b''b'' \\ 4865. \end{matrix}$$

$a^3 = 64$

$3a^2 = 48 : 511.45$ (465 92)

$3a'^2 = 6912 : 455\,39.14$ (41992 56)

$3a''^2 = 708588 : 3546586.25$ (3546586 25)

0

$3a^2b = 384$ $\quad 3a'^2b' = 41472$

$3ab^2 = 768$ $\quad 3a'b'^2 = 5184$

$b^3 = 512$ $\quad b'^3 = 216$

46592 $\quad 4199256$

$3a''^2b'' = 3542940$

$3a''b''^2 = 36450$

$b''^3 = 125$

354658625

1) $\sqrt[3]{55045462464} = 3804$.

2) $\sqrt[3]{166920094216} = 5506$.

§. 116. Aufgabe. Man soll die Kubikwurzel aus einer Zahl, welche kein vollständiger Kubus ist, annähernd durch einen Dezimalbruch ausdrücken, z. B. die Kubikwurzel aus 435169 bis auf zwei Dezimalstellen genau.

Auflösung. Man hänge dem Radicanden dreimal soviel Nullen an, als man Dezimalstellen haben will, und dividire denselben gleichzeitig wieder durch eine 1 mit ebenso vielen Nullen. Hierauf ziehe man die Wurzel aus dem Zähler und Nenner. §. 99. II.

$$\sqrt[3]{435169} = \sqrt[3]{\frac{435169000000}{1000000}} = \sqrt[3]{\frac{435169000000}{100^3}} = \frac{7577\ldots}{100} = 75{,}77\ldots\ldots$$

Beispiele: 1) $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599210\ldots$ 8) $\sqrt[3]{19} = 2{,}6684016\ldots$

2) $\sqrt[3]{3} = 1{,}4422495\ldots$ 9) $\sqrt[3]{23} = 2{,}8438669\ldots$

3) $\sqrt[3]{5} = 1{,}7099759\ldots$ 10) $\sqrt[3]{101} = 4{,}657010\ldots$

4) $\sqrt[3]{7} = 1{,}9129311\ldots$ 11) $\sqrt[3]{267} = 6{,}439277\ldots$

5) $\sqrt[3]{11} = 2{,}2239800\ldots$ 12) $\sqrt[3]{687} = 8{,}823731\ldots$

6) $\sqrt[3]{13} = 2{,}3513346\ldots$ 13) $\sqrt[3]{869} = 9{,}542744\ldots$

7) $\sqrt[3]{17} = 2{,}5712815\ldots$ 14) $\sqrt[3]{917} = 9{,}715305\ldots$

Die Bemerkungen des §. 108 gelten auch für diese Aufgabe.

§. 117. Aufgabe. Man soll aus einem Dezimalbruche, z. B. aus 0,42186, die Kubikwurzel ziehen.

Auflösung: Man ziehe die Kubikwurzel aus dem Zähler und Nenner und hänge dem Dezimalbruche so viele Nullen an, daß die Anzahl der Stellen sich durch 3 ohne Rest theilen läßt. Hierdurch erhält man zum Nenner eine vollständige Kubikzahl.

$$\sqrt[3]{0{,}42186} = \sqrt[3]{0{,}421860} = \frac{\sqrt[3]{421860}}{\sqrt[3]{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{421860000000}}{\sqrt[3]{1000000000000}} = \frac{7499\ldots}{10000} = 0{,}7499\ldots$$

Beispiele:

1) $\sqrt[3]{5{,}8} = 1{,}79670\ldots$

2) $\sqrt[3]{28{,}25} = 3{,}04559\ldots$

3) $\sqrt[3]{102{,}875} = 4{,}68205\ldots$

4) $\sqrt[3]{58230{,}605376} = 38{,}76.$

5) $\sqrt[3]{0{,}880} = 0{,}958\ldots$

6) $\sqrt[3]{0{,}0037} = 0{,}1546686\ldots$

7) $\sqrt[3]{0{,}000613041887375} = 0{,}08495.$

8) $\sqrt[3]{0{,}923441335272} = 0{,}9738.$

§. 118. Aufgabe. Man soll aus einem gewöhnlichen Bruch die Kubikwurzel ziehen.

Die Auflösung kann wiederum, wie im §. 110 bereits erörtert worden ist, eine zweifache sein.

Beispiele:

1) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}.$

2) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}.$

3) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5}$.

4) $\sqrt[3]{465\frac{31}{64}} = 7\frac{3}{4}$.

5) $\sqrt[3]{52034\frac{10}{27}} = 37\frac{1}{3}$.

6) $\sqrt[3]{15\frac{2}{3}} = 2{,}5022202\ldots$

7) $\sqrt[3]{3\frac{4}{5}} = 1{,}56049\ldots$

8) $\sqrt[3]{\frac{5}{14}} = 0{,}70949\ldots$.

§. 119. Fragen und Antworten.

1) Was sind additive und subtractive Ausdrücke? §. 89.
Antw.: Es sind Ausdrücke von der Form + a und — a.

2) Was hat man sich eigentlich darunter zu denken?
Antw.: Die Summe 0 + a und die Differenz 0 — a.

3) Wie werden additive und subtractive Ausdrücke addirt, wenn sie einerlei Vorzeichen haben? §. 91. I.

4) Wie werden additive und subtractive Ausdrücke addirt, wenn sie verschiedene Vorzeichen haben? §. 91. II.

5) Wie werden additive und subtractive Ausdrücke subtrahirt? §. 91. B.

6) Wie werden additive und subtractive Ausdrücke multiplicirt und dividirt? §. 92.

7) Was ist eine algebraische Summe? §. 93.

8) Wie werden algebraische Summen addirt? §. 94.

9) Wie werden algebraische Summen subtrahirt? §. 95.

10) Wie werden algebraische Summen multiplicirt? §. 96.

11) Wie werden algebraische Summen dividirt? §. 97.

12) Was versteht man unter einer Potenz und was bezeichnet dieselbe? §. 98.

13) Was versteht man unter einer Wurzel und was bezeichnet dieselbe? §. 99.

14) Wie wird ein Product mit einer Zahl potenzirt? §. 98. I.

15) Wie wird ein Quotient mit einer Zahl potenzirt? §. 98. II.

16) Wie wird ein Product durch eine Zahl radicirt? §. 99. I.

17) Wie wird ein Quotient durch eine Zahl radicirt? §. 99. II.

18) Wie nennt man das Verfahren, durch welches der Werth irgend einer Wurzel ermittelt werden kann? §. 101.
Antw.: Das Ausziehen der Wurzeln.

19) Wenn die Quadratwurzel aus einer Zahl gezogen werden soll, welcher Formel bedient man sich dazu, und als was hat man die zu radicirende Zahl demnächst zu betrachten? §. 102.

20) Wenn man von einer 3- bis 4ziffrigen Zahl, aus welcher die Quadratwurzel gezogen werden soll, zur Rechten eine Klasse von 2 Ziffern abschneidet, welche Beziehungen finden alsdann zwischen den erhaltenen beiden Klassen und den Theilen der Formel $a^2 + 2ab$ statt? §. 102. 1 und 2.

21) Wie ist das Verfahren, wenn man die Quadratwurzel aus einer 3 oder 4ziffrigen Zahl ziehen soll? §. 104.
22) Wie ist das Verfahren, wenn man die Quadratwurzel aus einer Zahl, welche mehr als 4 Ziffern hat, ziehen soll? §. 105—107.
23) Wie verfährt man, wenn die Quadratwurzel aus einer Zahl irrational ist, und man sich dem wahren Werthe immer mehr nähern will? §. 108.
24) Wie wird aus einem Dezimalbruche die Quadratwurzel gezogen? §. 109.
25) Wie zieht man aus einem gewöhnlichen Bruche die Quadratwurzel? §. 110.
26) Mittelst welcher Formel zieht wan die Kubikwurzel aus einer Zahl, und als was hat man diese Zahl demnächst zu betrachten? §. 111.
27) Wenn man von einer 4 bis 6ziffrigen Zahl, aus welcher die Kubikwurzel gezogen werden soll, zur Rechten eine Klasse von drei Ziffern abschneidet, welche Beziehungen finden alsdann zwischen den erhaltenen beiden Klassen und den Theilen der Formel a^3+3a^2b statt? §. 111.
28) Wie findet man die Kubikwurzel aus einer 4 bis 6 ziffrigen Zahl? §. 113.
29) Wie findet man die Kubikwurzel aus einer Zahl, welche mehr als 6 Ziffern hat? §. 114 und 115.
30) Wie verfährt man, wenn die Kubikwurzel aus einer Zahl irrational ist, und man sich dem wahren Werthe immer mehr nähern will? §. 126.
31) Wie zieht man die Kubikwurzel aus einem Dezimalbruche? §. 117.
32) Wie zieht man die Kubikwurzel aus einem gewöhnlichen Bruche? §. 118.

---

§. 120. Tabellarische Uebersicht der Operations-Gesetze.

Kapitel 1.

Addition und Subtraction absoluter Zahlen.

1) $a+b=b+a$. §. 18. I.
2) $(a+b)+c=(a+c)+b=a+(b+c)$. §. 18. II.
3) $a+m=b+m$, wenn $a=b$ und $m=m$. §. 18. III.
4) $(a-b)+b=a$. §. 22. IV.
5) $(a+b)-b=a$. §. 22. V.
6) $a-m=b-m$, wenn $a=b$ und $m=m$. §. 22. VI.
7) $a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b$. §. 22. VII.

N. 1. N. 2. N. 3. N. 4.

8) $(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)=a-(c-b)$. §. 27. A.

9) $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$. §. 28. N. 5.
10) $(a-b)-(c-d)=(a-c)-(b-d)$: §. 28. N. 6.
11) $a-b=(a+c)-(b+c)=(a-c)-(b-c)$. §. 29. N. 7.

Kapitel 2.

Multiplication und Division absoluter Zahlen.

1) $ab=ba$. §. 32. I.
2) $(ab)c=(ac)b=a(bc)$. §. 32. II.
3) $am=bm$, wenn $a=b$ und $m=m$. §. 32. III.
4) $(a+b)c=ac+bc$. §. 32. IV.
5) $(a-b)c=ac-bc$. §. 32. V.
6) $m=1.m$. §. 33.
7) $\frac{a}{b}.b=a$. §. 39. I.
8) $\frac{ab}{b}=a$. §. 39. II.
9) $\frac{a}{m}=\frac{b}{m}$, wenn $a=b$ und $m=m$. §. 39. III.
10) $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$. §. 39. IV.
$\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$. §. 39. IV.
11) $\frac{A}{B}=a+\frac{A-aB}{B}$. §. 39. V.
12) $\frac{a}{a}=1$. §. 40. 1.
13) $\frac{a}{1}=a$. §. 40. 2.

N. 1. N. 2. N. 5. N. 6.
14) $\frac{ab}{c}=\frac{a}{c}.b=a.\frac{b}{c}=a:\frac{c}{b}$. §. 45. I.
N. 3. N. 3. N. 4.
15) $\frac{a}{b}:c=\frac{a}{c}:b=\frac{a}{bc}$. §. 45. II.
16) $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. §. 46. N. 7.
17) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a:c}{b:d}=\frac{ad}{bc}$. §. 46. N. 8.
18) $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}=\frac{a:c}{b:c}$. §. 47. N. 9.

Kapitel 6.

Addition, Subtraction, Multiplication und Division der Rechnungsformen.

1) $a+0=a$.
2) $a-0=a$. §. 90.
3) $a.0=0$.

4) $\frac{0}{a} = 0$. §. 90.

5) $\frac{a}{0}$ hat keinen Zahlenwerth.

$$\left.\begin{array}{l} a+(+b)=a+b. \\ a+(-b)=a-b. \\ a-(+b)=a-b=-(b-a). \\ a-(-b)=a+b. \\ (-a)+(-b)=-(a+b). \\ (-a)-(-b)=b-a=-(a-b). \end{array}\right\} \text{§. 91.}$$

$$\left.\begin{array}{l} a.(-b)=-ab. \\ (-a).(-b)=ab. \\ \frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}. \\ \frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}. \end{array}\right\} \text{§. 92.}$$

Kapitel 8.

Potenzirung und Radicirung.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ (ab)^m = a^m \cdot b^m. \\ 2)\ \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}. \end{array}\right\} \text{§. 98.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ \sqrt[m]{a^m} = a. \\ 4)\ \sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}. \\ 5)\ \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}. \end{array}\right\} \text{§. 99.}$$

Zweiter Theil der Zahlenlehre.

Die Lehre von den benannten Zahlen.

V. Abschnitt.

Von den vier Elementar-Operationen mit benannten Zahlen.

Zehntes Kapitel.

Von der Reduction der benannten Zahlen.

§. 121. Sind A und B zwei gleichartige Größen, die, durch die Gemäßeinheit G gemessen, die benannten Zahlen xG und yG erzeugen, so hat man die Gleichungen $A=xG$ und $B=yG$, und sind die Maaße x und y einander gleich, so ist auch $A=B$, d. h.: gleichartige Größen sind einander gleich, wenn sie, mit einerlei Gemäß gemessen, gleiche Maße geben.

Sind aber die Maße x und y nicht gleich, also $x \gtrless y$, so ist auch $A \gtrless B$, d. h.: gleichartige Größen sind ungleich, wenn sie, mit einerlei Gemäß gemessen, ungleiche Maße geben.

§. 122. Für die Bequemlichkeit im Verkehr hat man die Gemäße wiederum in kleine Gemäßeinheiten getheilt, so daß auch solche Größen, die, auf irgend eine Gemäßeinheit bezogen, gebrochene, benannte Zahlen erzeugen, als ganze benannte Zahlen ausgedrückt werden können. So z. B. kann man $\frac{1}{2}$ Thaler durch 10 Sgr., $\frac{1}{2}$ Pfund durch 16 Loth u. dgl. m. ausdrücken.

Fast jeder Staat hat seine eigene Gemäßeintheilung. In den Preußischen Staaten sind folgende Eintheilungen gesetzlich:

1. Längengemäße.

1° Ruthe = 12′ Fuß = 144″ Zoll = 1728‴ Linien
1′ = 12″ = 144‴
1″ = 12‴
= 1‴ = 12 Scrupel.

In der Artillerie wird der Zoll nicht in Linien, sondern in hundert gleiche Theile getheilt.

Die vorstehende Eintheilung heißt das Duodezimal-Maß, ddc. M. (auch Werkmaß).

Beim Feldmessen ist das Dezimalmaß, dc. M., auch Feldmaß genannt, üblich, nämlich:

$$1^\circ = 10' = 100'' = 1000'''$$
$$1' = 10'' = 100'''$$
$$1'' = 10'''$$

1 Elle = 25½ Zoll.
1 Faden = 6 Fuß.
1 Ruthe = 5 Schritt.
1 Meile = 2000 Ruthen = 10000 Schritt.
1 Schritt = 2½′ ddc. M. = 2′ dc. M..

2) Flächengemäße.

1) 1 □° (Quadratruthe) =
144□′ (Q. Fuß) = 20736□″ (Q. Zoll) = 2985984□‴ (Q. Lin.) ddc. M.
1 □′ = 144□″ = 20736□‴
1□″ = 144□‴

2) 1 □° = 100□′ = 10000□″ = 1000000□‴ dc. M.
1□′ = 100□″ = 10000□‴
1□″ = 100□‴

1 Morgen = 180□°
1 Hufe = 30 Morgen.

3) Körpergemäße.

1 c° (Cubikruthe) = 1728 c′ (Cubikfuß) = 2985984 c″ (Cubikzolle) ddc. M.
1 c′ = 1728 c″
1 c″ = 1728 c‴

1 Klafter = 108 c′ (Die Klafter ist ein körperlicher Raum von 6′ Länge, 6′ Breite und 3′ Höhe = 108 c′)
1 Haufen (Holz) = 4½ Klafter.
1 Haufen (Torf) = 6 großen oder 240 kleinen Maßkörben.
1 Schachtruthe = 144 c′ = 1½ c°
1 Quart = 64 c″
1 Wispel = 2 Malter = 24 Scheffel = 96 Viertel = 384 Metzen.
1 " = 12 " = 48 " = 192 "
1 " = 4 " = 16 "
1 " = 4 "
1 Orhoft = 1½ Ohm = 3 Eimer = 6 Anker = 180 Quart.
1 " = 2 " = 4 " = 120 Quart.
1 " = 2 " = 60 "
1 " = 30 "
1 Tonne = 100 Quart.

4) Winkelgemäße.

1° (Grad) = 60′ (Minuten) = 3600″ (Sekunden).
1′ = 60″
1 R. (rechter Winkel) = 90° = 5400′ = 324000″.
1° = $\frac{1}{90}$ R.; 1′ = $\frac{1}{5400}$° = $\frac{1}{5400}$ R.; 1″ = $\frac{1}{60}$′ = $\frac{1}{324000}$°.

5) Gewichte.

1 Ctr. (Centner)=110 Pfd. (Pfund) = 3520 Loth = 14080 Quentchen.
1 " = 32 " = 128 "
1 " = 4 "
1 Schiffslast=4000 Pfd.
1 Mark = 16 Lth.
1 Medizinalpfd. = 24 Lth.
1 Medizinalpfd. =
12 ℥ (Unzen)=96 ʒ (Drachmen)=288 ℈ (Scrupel)=5760 gr. (Gran).
1 " = 8 " = 24 " = 480 "
1 " = 3 " = 60 "
1 " = 20 "
1 Mark Silber = 16 Lth. = 96 Gran = 288 Grän.
1 " = 6 " = 18 "
1 " = 3 "
1 Mark Gold = 24 Karath = 144 Grän.
1 " = 6 "

6) Münzen.

1 Thlr. (Thaler) = 30 Sgr. (Silbergroschen) = 360 Pf. (Pfennige).
1 " " = 12 "

7) Verschiedene andere Gemäße.

1 Ballen=
10 Rieß=200 Buch=4800 Bog. Schreibpap. od. 5000 Bg. Druckpap.
1 " = 20 " = 480 " " 500 " "
1 " = 24 " " 25 " "
1 Stück Garn = 20 Gebinde = 800 Fäden = 2800 Ellen.
1 " = 40 " = 140 "
1 Faden = 3½ "
1 Stück Zwirn = 40 Fitzen = 1920 Ellen.
1 " = 48 "
1 Groß = 12 Dutzend = 144 Stück.
1 " = 12 "
1 Schock = 4 Mandeln = 60 Stück (bei Stroh:Bunde).
1 " = 15 "
1 Bund Stroh=20 Pfd.
1 Bund Heu = 20 Pfd.

8) Zoll-Vereins-Gewicht.

1 Ctr.=100 Pfd.=3000 Lth.
1 Pfd.= 30 Lth.

9) **Vergleichung des Vereins-Gewichts mit dem preußischen.**

1 Vereins-Ctr. = 106 Pfd. 28,9 Loth preußisch oder genau
= 106 Pfd. 28,91552 Lth.

1000000 Ctr. = 971851 Ctr. preußisch.

10) **Rationssätze.**

Es erhält	Friedens-Ration						Feld-Ration		
	Garnison			Marsch					
	Mtzn. Hafer	Heu (Pfd.)	Stroh (Pfd.)	Mtzn. Hafer	Heu (Pfd.)	Stroh (Pfd.)	Mtzn. Hafer	Heu (Pfd.)	Stroh (Pfd.)
1 Reitpferd	2½	5	8	3	3	4	3¾	3	4
1 Zugpferd	3	5	8	3½	3	4	3¾	3	4

§. 123. **Aufgabe.** Man soll eine benannte Zahl xG in eine benannte Zahl niederer Ordnung umformen.

Auflösung: Enthält das Gemäß G ein anderes kleineres Gemäß G′ a mal, so ist $xG = x \,.\, aG'$.*)

In Worten: „Man multiplicire das Maß der gegebenen benannten Zahl mit derjenigen Zahl, welche angiebt, wie oft das kleinere Gemäß (Gemäß niederer Ordnung) in dem größeren enthalten ist, und gebe dem gebildeten Producte die Benennung des kleineren Gemäßes."

Beispiele:

1) Wie viele Silbergroschen sind in 58 Thlr. enthalten?
Antw.: 58 Thlr. = 58.30 Sgr. = 1740 Sgr.

2) Wie viel Loth sind 3 Ctr.?
Antw.: 3 Ctr. = 3.110 Pfd. = 3.110.32 Lth. = 10560 Lth.

§. 124. Beziehen sich gleichartige benannte Zahlen auf verschiedene Gemäßeinheiten, so nennt man dieselben mehrfach benannt. So z. B. sind: 1° + 10′ + 8,5″ oder: 2 Thlr. 27 Sgr. 6 Pf. mehrfach benannte Zahlen.

Beispiele:

1) Es sollen 1° 10′ 8,5″ in Zollen ausgedrückt werden.
Auflösung: Man wende das Verfahren des §. 123 wiederholt an, und bringe zunächst die Ruthen auf Fuße, und sodann die Anzahl der Fuße auf Zolle.

*) Der Anfänger, welcher in der allgemeinen Bezeichnung Schwierigkeiten finden sollte, setze für das Gemäß G den Scheffel und für das Gemäß G′ die Metze.

$1^{\circ} + 10' + 8{,}5'' = (1.12 + 10)' + 8{,}5'' = (22.12 + 8{,}5)'' = 272{,}5''$.

2) Wie viel machen 1 Wispel 5 Scheffel und 3 Viertel in Metzen?

Auflösung: 1 Wspl. 5 Schffl. 3 Vrt. = 1.24 Schffl. + 5 Schffl. + 3 Vrt. = 29 Schffl. 3 Vrt. = 29.16 Mtz. + 3.4 Mtz. = (464 + 12) Mtz. = 476 Metzen.

§. 125. **Aufgabe.** Man soll die benannte Zahl xG^1 in eine benannte Zahl höherer Ordnung umformen.

Auflösung: Ist G^1 das Gemäß niederer Ordnung, und $G = aG^1$ das Gemäß höherer Ordnung, so ist $xG^1 = \frac{x}{a} G$;

denn: $xG = xaG'$ und durch a dividirt

$$\frac{x}{a} G = xG^1.$$

In Worten: „Man dividire das Maß der gegebenen benannten Zahl durch diejenige Zahl, welche angiebt, wie oft das gegebene kleinere Gemäß in dem größeren enthalten ist, und gebe dem erhaltenen Quotienten die Benennung des größeren Gemäßes."

Beispiele:

1) Wie viel Thaler sind in 6120 Pfennigen enthalten?

Auflösung: $6120\,\text{Pf.} = \frac{6120}{12}\,\text{Sgl.} = \frac{6120}{12.30}\,\text{Thlr.} = 17\,\text{Thlr.}$

Anmerkung. Die Verwandlung einer benannten Zahl in eine benannte Zahl höherer Ordnung führt in dem Falle, daß $\frac{x}{a}$ keine ganze Zahl giebt, auf die gebrochene benannte Zahl, und man versteht alsdann unter $\frac{x}{a}G$ den aten Theil von G, x mal genommen, weil $\frac{x}{a}G = x \cdot \frac{1}{a}G$ ist. So ist z. B. $\frac{2}{3}$ Thlr. der 5te Theil eines Thlr. 3 mal genommen, und $\frac{1}{9}$ Pfd. der 9te Theil eines Pfundes 1 mal genommen.

2) Den wie vielten Theil eines Centners betragen 25 Loth?

Auflösung: $25\,\text{Lth.} = \frac{25}{32}\,\text{Pfd.} = \frac{25}{32.110}\,\text{Ct.} = \frac{25}{3520}\,\text{Ct.} = \frac{5}{704}\,\text{Ct.}$

3) Wie viel Pfd. und Lth. betragen $\frac{17}{40}$ Ct.?

Auflösung: $\frac{17}{40}\,\text{Ct.} = \frac{17.110}{40}\,\text{Pfd.} = \frac{187}{4}\,\text{Pfd.} = 46\frac{3}{4}\,\text{Pfd.} =$

$46\,\text{Pfd.}\ \frac{3.32}{4}\,\text{Lth.} = 46\,\text{Pfd.}\ 24\,\text{Lth.}$

4) Der wie vielste Theil eines Centners sind $\frac{11}{16}$ Loth?

Auflösung:

$\frac{11}{16}\,\text{Lth.} = \frac{11}{16} : 32\,\text{Pfd.} = \frac{11}{16.32}\,\text{Pfd.} = \frac{11}{16.32.110}\,\text{Ctr.} = \frac{1}{5120}\,\text{Ctr.}$

5) Wie viel Thaler, Silbergroſchen und Pfennige ſind in $\frac{128}{5}$ Thlr. enthalten?

Auflöſung:

$\frac{128}{5}$ Thlr. $= 25\frac{3}{5}$ Thlr. $= 25$ Thlr. $\frac{3.30}{5}$ Sgr. $= 25$ Thlr. 18 Sgr.

25 Thlr. 18 Sgr. $= 25.30$ Sgr. $+ 18$ Sgr. $= 768$ Sgr.

768 Sgr. $= 768.12$ Pf. $= 9216$ Pf.

6) Wie viel machen 2055 Pf. in Thalern?

Auflöſung: 2055 Pf. $= \frac{2055}{12.30}$ Thlr. $= \frac{137}{24}$ Thlr. $= 5\frac{17}{24}$ Thlr.

7) Wie viel Rieß, Buch und Bogen machen $\frac{5}{8}$ Ballen Schreibpapier?

Auflöſung: $\frac{5}{8}$ Ballen $= \frac{5.10}{8}$ Rieß $= \frac{25}{4}$ Rieß $= 6\frac{1}{4}$ Rieß.

$6\frac{1}{4}$ Rieß $= 6$ Rieß $\frac{20}{4}$ Buch $= 6$ Rieß 5 Buch $= (6.20+5)$ Buch $=$ 125 Buch.

125 Buch $= 125.24$ Bogen $= 3000$ Bogen.

8) Der wie vielſte Theil eines Scheffels und Bundes iſt eine ſchwere Marſchration?

$3\frac{1}{2}$ Mtz. Hafer $= \frac{7}{2.16}$ Schfl. $= \frac{7}{32}$ Scheffel.

3 Pfd. Heu $= \frac{3}{20}$ Bund.

4 Pfd. Stroh $= \frac{4}{20}$ Bund $= \frac{1}{5}$ Bund.

9) Wie viel machen 13° 9′ 8″ 6‴ ddc. M. in Ruthen ausgedrückt?

$13° 9′ 8″ 6‴ = 13° 9′ 8\frac{1}{2}″ = 13° 9\frac{17}{24}′ = 13° \frac{233′}{24} = 13° +$

$+ \left(\frac{233}{24} : 12\right)° = 13\frac{233°}{288}$; oder:

$13° 9′ 8″ 6‴ = \left(13 + \frac{9}{12} + \frac{8}{144} + \frac{6}{1728}\right)° = \left(13 + \frac{9.144+8.12+6}{1728}\right)° =$

$13\frac{1398°}{1728} = 13\frac{233°}{288}$.

10) Wie viel machen 120□′ 17□″ 88□‴ in □ Ruthen?

$120□′ 17□″ 88□‴ = 120□′ \left(17 + \frac{88}{144}\right)□″ = 120□′ 17\frac{11}{18}□″ =$

$\left(120 + \frac{317}{18.144}\right)□′ = 120\frac{317}{2592}□′ = \frac{311357}{373248}□°$.

11) Wie viel machen 30° 9′ 8″ 7‴ dc. M. in Ruthen?

$30° 9′ 8″ 7‴ = \left(30 + \frac{9}{10} + \frac{8}{100} + \frac{7}{1000}\right)° = 30{,}987°$. (§. 70). Man erhält daher, wenn Decimalmaß gegeben iſt, ohne Weiteres 6° 7″ 8‴ $= 6{,}078°$.

12) Wie viel □Ruthen ſind 8□° 6□′ 89‴ dc. M.?

$8□° 6□′ 89□‴ = \left(8 + \frac{6}{100} + \frac{89}{1000000}\right)□° = \left(8 + \frac{60089}{1000000}\right)□° =$ $8{,}060089□°$.

13) Wie viel □Ruthen ſind 7□′ 3□″ 18□‴ dc. M.? Antw.: 0,070318□°.

14) Wie viel machen 3° 4′ 9″ 3‴ dc. M. in Linien?

$3° 4′ 9″ 3‴ = 3° 4′ 93‴ = 3° + (400+93)‴ = (3000+493)‴ =$ 3493‴.

15) Wie viel Linien ſind 5° 7″ 9‴ dc. M.? Antw.: 5079‴.

16) Wie viel machen 11□° 30□″ 77□‴ dc. M. in □Linien? 11□° 30□″ 77□‴ = 11□° + (3000 + 77)□‴ = (11000000 + 3077)□‴ = 11003077□‴.

17) 7□′ 3□″ 18□‴ = 0,070318□°, oder = 70318□‴.

§. 126. Noch andere Uebungsbeispiele.

1) 13 Schock 3 Mandeln 12 Stück = 837 Stück.
2) 128 Groß 11 Dutzend 11 Stück = 18575 Stück.
3) 45° 11′ 7″ 3‴ = 79431‴ ddc. M.
4) 230 Orhoft 2 Eimer 1 Anker 29 Quart = 41579 Quart.
5) 550 Wispel 18 Schffl. 3 Vrtl. 3 Mtz. = 211503 Metzen.
6) 6840 Thlr. 27 Sgr. 5 Pf. = 2462729 Pf.
7) 25 Ballen 8 Rieß 16 Buch 15 Bogen Schreibpapier = 124239 Bogen.
8) 212 Morgen 75□° 26□′ dc. M. = 3823526□′ dc. M., oder 212 Morgen 75□° 26□′ ddc. M. = 5505866□′ ddc. M.
9) 710 Klaftern 96c′ = 132668928c″.
10) 22518 Pf. = 62 Thlr. 16 Sgr. 6 Pf.
11) 76432 Pfd. = 694 Ctr. 92 Pfd.
12) 736842 Quart = 7368 Tonnen 42 Quart.
13) 5543998 Linien dc. M. = 5543° 9′ 9″ 8‴.
14) 98764935 Pf. = 274347 Thlr. 1 Sgr. 3 Pf.
15) 41528210 Minuten = 79 Jahre 4 Tage 50 Minuten.
16) 564344 Stück = 9405 Schock 2 Mandeln 14 Stück.
17) 58430056 Mtz. = 152161 Wspl. 14 Schffl. 8 Mtz.
18) Was wiegen 135 Schock 2 Mandeln 10 Bund Stroh? Antw.: 1480 Ctr.
19) $\frac{125}{2350}$ Thlr. = 1 Sgr. $7\frac{7}{47}$ Pf.
20) $\frac{3660}{4533}$ Schock = 3 Mandeln $3\frac{672}{1511}$ Stück.
21) $\frac{3516}{17580}$ Thlr. = 6 Sgr.
22) 24 Sgr. $9\frac{2}{3}$ Pf. = $\frac{893}{1080}$ Thlr.
23) 1 Ohm $22\frac{3}{5}$ Quart = $\frac{713}{900}$ Orhoft.
24) 103680c″ = $\frac{5}{12}$ Schachtruthe.

Elftes Kapitel.

Die Addition und Subtraction der benannten Zahlen.

§. 127. Will man benannte Zahlen addiren oder subtrahiren, so müssen dieselben gleichartig sein, denn man kann

z. B. nicht Pfunde und Thaler zu einander hinzuzählen, oder von einander abziehen. Sind aber die benannten Zahlen gleichartig, so addirt und subtrahirt man ihre Maße (die unbenannten Zahlen), und giebt dem Resultate wiederum die Benennung des gemeinschaftlichen Gemäßes.

Hiernach ist: $xG + yG = (x + y)\,G.$

und $xG - yG = (x - y)\,G.$

In der Differenz $x - y$ kann $x \gtreqless y$ sein, und man hat, wenn $x = y$ ist: $xG - xG = (x - x)G = 0G.$ In diesem Falle ist $0G$ diejenige Größe, die, zum Subtrahend addirt, wiederum den Minuenden xG geben muß. Die Addition von $0G$ ändert daher nichts, und in diesem Sinne bedeutet die Null, als benannte Zahl betrachtet, Nichts.

Ist aber $x > y$, so ist auch $x - y$ eine absolute Zahl, und folglich $(x-y)G$ als Größe wirklich vorhanden.

Ist aber endlich $x < y$, so ist $x-y = -(y-x)$ eine negative Zahl, und es wäre nun auch $(x-y)G = -(y-x)G$ eine negative, benannte Zahl oder Größe. Eine solche Größe enthält aber einen Widerspruch in sich, denn sie ist in der Wirklichkeit nirgends vorhanden. Die Einführung der negativen Größen (oder sogenannten entgegengesetzten Größen) in die allgemeine Größenlehre ist daher nicht statthaft, und es muß bei der Subtraction benannter Zahlen der Minuend stets größer sein, als der Subtrahend.

§. 128. Sind die benannten Zahlen mehrfach benannt, so addire man zunächst die Einheiten der niedrigsten Ordnung und hierauf die der höheren Ordnung, zähle aber zu den letzteren so viele gleichbenannte Einheiten mit hinzu, als sich deren, durch Reduction, aus der Summe der niederen Ordnung ergeben.

1)	4	Wspl.	16	Schffl.	$3\frac{1}{2}$	Mtzn.
	—	=	18	=	$12\frac{3}{4}$	=
	5	=	22	=	$15\frac{1}{3}$	=
	6	=	4	=	$5\frac{5}{6}$	=
	(2)		(2)		(2)	
	17	Wspl.	14	Schffl.	$5\frac{5}{12}$	Mtzn.

2) 13 Ctr. $4\frac{1}{3}$ Pfd. $6\frac{3}{9}$ Lth. = 13 Ctr. $4\frac{40}{120}$ Pfd. $6\frac{12}{36}$ Lth.
— " $18\frac{2}{6}$ " $21\frac{3}{4}$ " = — " $18\frac{48}{120}$ " $21\frac{27}{36}$ "
6 " $109\frac{3}{4}$ " $29\frac{1}{2}$ " = 6 " $109\frac{90}{120}$ " $29\frac{18}{36}$ "
101 " $11\frac{7}{8}$ " $4\frac{5}{6}$ " = 101 " $11\frac{105}{120}$ " $4\frac{30}{36}$ "
(1) (1)
(2) (2)

121 Ctr. $35\frac{43}{120}$ Pfd. $30\frac{5}{12}$ Lth. =
121 Ctr. 36 Pfd. $9\frac{53}{60}$ Lth.

§. 129. Bei der Subtraction mehrfach benannter Zahlen zieht man ebenfalls zunächst die niedrigsten Ordnungen von einander ab, wobei es sich häufig ereignet, daß die Zahl irgend einer Ordnung im Minuend kleiner ist, als die entsprechende Zahl im Subtrahend. In diesem Falle verwandelt man eine Einheit der entsprechenden nächst höhern Ordnung des Minuenden in Einheiten der niedern Ordnung, und addirt dieselben zu den übrigen gleichnamigen Einheiten des Minuenden hinzu. Dieses Verfahren nennt man das Borgen. Hierauf verrichtet man die Subtraction nach §. 127; z. B.:

(220) (39) (21)
1) Von 221 Thlr. 10 Sgr. 9 Pf. soll subtrahirt werden:
88 " 25 " 11 "
132 Thlr. 14 Sgr. 10 Pf.

2) Von 2 Wispel 3 Metzen sind 14 Scheffel 8 Metzen verausgabt, wie viel bleibt Bestand?
(1) (23) (19)
2 Wspl. — Schffl. 3 Mtzn.
14 " 8 "
1 Wspl. 9 Schffl. 11 Mtzn.

3) Wie viel Thlr., Sgr. und Pf. bleiben übrig, wenn man von $3\frac{3}{8}$ Thlr. $1\frac{7}{9}$ Thlr. verausgabt hat?
Es ist: $3\frac{3}{8}$ Thlr. = 3 Thlr. 11 Sgr. 3 Pf.
$1\frac{7}{9}$ " = 1 " 23 " 4 "
1 Thlr. 17 Sgr. 11 Pf.

§. 130. Uebungsbeispiele.

1) 7 Wspl. 21 Schffl. $14\frac{7}{8}$ Mtz. + 1 Wspl. 3 Schffl. $9\frac{6}{11}$ Mtz. + $18\frac{1}{2}$ Mtz. + 5 Wspl. 8 Schffl. $\frac{3}{4}$ Mtz. + 22 Schffl. $\frac{11}{16}$ Mtz. + 3 Wspl. 3 Schffl. $4\frac{1}{4}$ Mtz. + 13 Wspl. $7\frac{5}{9}$ Mtz. + 2 Wspl. 15 Schffl. $17\frac{11}{12}$ Mtz. + 11 Wspl. 18 Schffl. $1\frac{1}{3}$ Mtz. = 45 Wspl. 22 Schffl. $11\frac{89}{264}$ Mtz.

2) 37 Ctr. 81 Pfd. $7\frac{1}{15}$ Lth. — 19 Ctr. 93 Pfd. $21\frac{7}{8}$ Lth. = 17 Ctr. 97 Pfd. $17\frac{23}{120}$ Lth.

3) 30 Wspl. 1 Schffl. $11\frac{51}{23}$ Mtz. — 11 Wspl. 7 Schffl. $7\frac{40}{41}$ Mtz. = 18 Wspl. 18 Schffl. $3\frac{2174}{3408}$ Mtz.

4) 77□° 18□′ 130□″ 143□‴ + 120□′ $76\frac{1}{2}$□‴ + 154□° 16□′ 39□″ $9\frac{10}{11}$□‴ + 40□° 97□′ $11\frac{1}{2}$□″ $6\frac{4}{5}$□‴ ddc. M. = 272□° 108□′ 38□″ $20\frac{28}{110}$□‴ = $272\frac{274386470}{364953600}$□°.

5) $1088\frac{3}{20}$□° + 13□° 99□′ 54□″ $34\frac{2}{3}$□‴ + $131\frac{7}{19}$□° + 66□° 80□′ $36\frac{1}{2}$□″ + 3□° 100□″ $\frac{8}{9}$□‴ dc. M. = 1303□° 32□′ 75□″ $6\frac{104}{171}$□‴ = $1303\frac{56003638}{171000000}$□° = 1303□° 32□′ 75□″ 6,6081..□‴ dc. M.

6) In einem Magazine befinden sich nachstehende Posten Pulver: 115 Ctr. 63 Pfd. 27 Lth., 37 Ctr. 109 Pfd. 16 Lth., 88 Pfd. 8 Lth., 12 Ctr. 24 Lth., 132 Ctr. 6 Pfd., 105 Ctr. 36 Pfd., 235 Ctr., 218 Ctr. 28 Lth. und 78 Ctr. 33 Pfd.; wie viel enthält das Magazin im Ganzen? Antw.: 935 Ctr. 8 Pfd. 7 Lth.

7) In den Magazinen einer Festung befinden sich folgende Vorräthe an Heu:
$366\frac{3}{4}$ Ctr., 546 Ctr. 104 Pfd., 736 Ctr. 95 Pfd. 30 Lth., 432 Ctr. $18\frac{1}{2}$ Pfd., 611 Ctr. 39 Pfd., 832 Ctr., 96 Ctr. 76 Pfd., $333\frac{1}{16}$ Ctr, $185\frac{1}{32}$ Ctr.; wie viel Heu hat die Festung im Ganzen?
Antw.: 4141 Ctr. 12 Lth.

8) Zu verschiedenen Zeiten sind nachstehende Munitions- und Zündungs-Gegenstände gefertigt:
324 - 6pfdge Kugelschuss, 762 - 12pfdge Kugelschuss, 3585 Schlagröhren, 95 - 2löthige Kartätschschuss, 580 - 6pfdge Kugelschuss, 132 - 12pfdge Kugelschuss, 155 Zündlichte, 1260 Schlagröhren, 125 - 3löthige Kartätschschuss, 586 - 6pfdge Kugelschuss, 99 - 2löthige Kartätschschuss, 588 Schlagröhren, 320 Zündlichte. Wie viel ist im Ganzen von jeder Art gefertigt worden?
Antw.: 1490 - 6pfdge Kugelschuss, 894 - 12pfdge Kugelschuss, 5433 Schlagröhren, 194 - 2löthige- und 125 - 3löthige Kartätschschuss, 475 Zündlichte.

9) Ein Fouragemagazin hat zu verschiedenen Zeiten folgenden Ersatz an Hafer erhalten:
34 Wispel 23 Schffl. 15 Metzen, 124 Wspl. 16 Schffl. $13\frac{3}{4}$ Mtz., 88 Wspl. 15 Mtz., $76\frac{5}{8}$ Wspl., 55 Wspl. $21\frac{7}{8}$ Scheffel, 15 Wspl. $19\frac{3}{4}$ Schffl., 9 Wspl. 11 Schffl. $12\frac{1}{4}$ Mtz., 72 Wspl. 18 Schffl. $7\frac{1}{4}$ Mtz.; wie viel Hafer enthält dieses Magazin?
Antw.: 478 Wispel 8 Scheffel $9\frac{1}{4}$ Metzen.

10) Zu einer Patronenarbeit sind ausgegeben worden:
11 Rieß 19 Buch Papier, 5 Ctr. 20 Pfd. 24 Lth. Pulver, 2 Stück 20 Fitzen Zwirn, 2 Buch 6 Bogen Papier, 14 Rieß 2 Buch,

6 Ctr. 76 Pfd. Pulver, 36 Fitzen Zwirn, 3 Rieß 18 Buch Papier, 3 Stück 12 Fitzen Zwirn, 5 Ctr. 30 Pfd. 16 Lth. Pulver, 12 Buch 12 Bogen Papier. Wie viel ist im Ganzen von jedem Material verabreicht worden?

Antw.: 3 Ballen 13 Buch 18 Bogen Papier, 17 Ctr. 17 Pfd. 8 Loth. Pulver, 6 Stück 28 Fitzen Zwirn.

11) Von 155633 Thlr. 27 Sgr. 9 Pf. sind verausgabt: 33640 Thlr. 18 Sgr. 5 Pf., 2520 Thlr. 27 Sgr. 11 Pf., 72360 Thlr. 17 Sgr. 10 Pf.; wie viel ist im Ganzen verausgabt, und wie viel bleibt Bestand?

Antw.: Verausgabt: 108522 Thlr. 4 Sgr. 2 Pf.
Bestand: 47111 Thlr. 23 Sgr. 7 Pf.

12) Von 3580 Ctr. 109 Pfd. 27 Lth. 2 Quentchen ist weggenommen: 2895 Ctr. 99 Pfd. 30 Lth. 3 Quentchen; wie viel bleibt übrig?

Antw.: 685 Ctr. 9 Pfd. 28 Lth. 3 Quentchen.

13) Wie viel muß man von 15683 Ctr. 67 Pfd. 31 Lth. 2 Quentchen wegnehmen, damit 1133$\frac{1}{4}$ Ctr. übrig bleiben?

Antw.: 14549 Ctr. 81 Pfd. 23 Lth. 2 Quentchen.

14) Ein Lieferant soll 9902$\frac{5}{16}$ Ellen Etamin und 880 Ellen Leinewand liefern; er hat bis jetzt in verschiedenen Terminen geliefert: 273$\frac{3}{4}$ Ellen Etamin, 300 Ellen Leinewand, 6000 Ellen Etamin, 875$\frac{1}{8}$ Ellen Etamin, 75$\frac{1}{2}$ Ellen Leinewand, 193$\frac{1}{2}$ Elle Etamin und 279$\frac{1}{2}$ Ellen Leinewand. Wie viel muß er noch liefern?

Antw.: 2559$\frac{1}{4}$ Ellen Etamin und 225$\frac{1}{2}$ Ellen Leinewand.

Zwölftes Kapitel.

Die Multiplication und Division der benannten Zahlen.

§. 131. Die Multiplication einer benannten Zahl mit einer benannten Zahl kann dem Begriffe der Multiplication gemäß nicht statt finden; denn 5 Sgr. mit 3 Sgr. multiplicirt würde heißen: man soll 5 Sgr. als Summand 3 Sgr. mal nehmen, welche Forderung aber etwas Ungereimtes enthält. Der Multiplicator muß daher eine unbenannte Zahl sein, wie z. B. in 5 Sgr. mal $3 = 15$ Sgr.

Regel: Man multiplicire das Maß der benannten Zahl mit dem unbenannten Multiplicator, und gebe dem Producte die Benennung des Multiplicanden.

Beweis: Ist die benannte Zahl xG mit a zu multipliciren, so ist

(xG) a = xG + xG + xG + ... a mal als Summand. Addirt man hierauf nach §. 127., ſo iſt auch:
(xG) a = (x + x + x + ... a mal als Summand) G.
Schreibt man aber dieſe Summe kürzer als Product, ſo erhält man:
(xG) a = xaG.

Beiſpiele.:

1) Man ſoll 13 Thlr. 7 mal nehmen.
Auflöſung: 13 Thlr. . 7 = 13.7 Thlr. = 91 Thlr.
2) Was giebt $\frac{11}{16}$ Pfd. mit 12 multiplicirt? Antw: $8\frac{1}{4}$ Pfd.

§. 132. Iſt der Multiplicandus eine mehrfach benannte Zahl, ſo kommt das Multiplications-Geſetz §. 32. IV. in Anwendung, wobei jedes Partialproduct, nach §. 125, auf die in ihm enthaltenen Einheiten höherer Ordnung reducirt, und zuletzt ſämmtliche Partialproducte addirt werden; z. B.:

13 Thlr. 16 Sgr. 9 Pf. multiplicirt mit 101
giebt: 9 Pf. × 101 = 909 Pf. = 2 Thlr. 15 Sgr. 9 Pf.
16 Sgr. × 101 = 1616 Sgr. = 53 Thlr. 26 Sgr. " "
13 Thlr. × 101 = " " " = 1313 Thlr. " " " "
13 Thlr. 16 Sgr. 9 Pf. . 101 = 1369 Thlr. 11 Sgr. 9 Pf.

Eine Abkürzung der Multiplication benannter Zahlen läßt ſich zuweilen dadurch erzielen, daß man die benannten Zahlen niederer Ordnung als gebrochene benannte Zahlen höherer Ordnung ausdrückt.

Beiſpiele:

1) (10 Thlr. 15 Sgr. 4 Pf.) . 8 = (10 Thlr. + $\frac{1}{2}$ Thlr. + $\frac{1}{3}$ Sg.) . 8.
$\frac{1}{3}$ Sgr. × 8 = $\frac{8}{3}$ Sgr. = — Thlr. 2 Sgr. 8 Pf.
$\frac{1}{2}$ Thlr. × 8 = $\frac{8}{2}$ Thlr. = 4 Thlr. — " — "
10 Thlr. × 8 = " = 80 Thlr. — " — "
84 Thlr. 2 Sgr. 8 Pf.

2) 11 Thlr. 6 Sgr. 4 Pf. multiplicirt mit $4\frac{3}{8}$ = 49 Thlr. 1 Sgr. $5\frac{1}{2}$ Pf.
3) Ein Rempute-Commando, beſtehend aus 30 Zug- und 4 Reitpferden, iſt 64 Tage auf dem Marſche; wie viel hat es in dieſer Zeit an Fourage verbraucht?
a) Bedarf an Hafer:
30 Zugpf. br. 30 . $3\frac{1}{2}$ M. × 64 = 6720 M. = $\frac{6720}{16}$ Schffl. = 420 Schffl.
4 Reitpf. 4 . 3 M. × 64 = 768 M. = 48 Schffl.
Macht im Ganzen: 468 Scheffel = 19 Wispel 12 Scheffel.
b) Bedarf an Heu:
34 Pferde brauchen: 34 . 3 Pfd. × 64 = 6528 Pfd. = $326\frac{2}{5}$ Bund = 59 Ctr. 38 Pfd.
c) Bedarf an Stroh:
34 Pferde brauchen: 34 . 4 Pfd. × 64 = 8704 Pfd. = $435\frac{1}{5}$ Bund = 79 Ctr. 14 Pfd.

4) Wenn 1 Pfd. 3 Thlr. 5 Sgr. 6 Pf. kostet, was kosten 20 Pfd. 16 Lth. von derselben Waare?

In diesem Beispiele hat es den Anschein, als ob 3 Thlr. 5 Sgr. 6 Pf. mit 20 Pfd. 16 Lth. multiplicirt werden müßten; allein dem ist nicht so, denn 20 Pfd. 16 Lth. = $20\frac{1}{2}$ Pfd. kosten offenbar $20\frac{1}{2}$ mal so viel, als 1 Pfd. Man hat daher auch nur 3 Thlr. 5 Sgr. 6 Pf. mit der unbenannten Zahl $20\frac{1}{2}$ zu multipliciren, und nicht mit $20\frac{1}{2}$ Pfd. Es ist also:

(3 Thlr 5 Sgr. 6 Pf.) . $20\frac{1}{2}$ = (3 Thlr. + $\frac{1}{6}$ Thlr. + $\frac{1}{60}$ Thlr.) . $\frac{41}{2}$ = $3\frac{11}{60} \cdot \frac{41}{2}$ Thlr. = $\frac{191.41}{60.2}$ Thlr. = $\frac{7831}{120}$ Thlr. = 65 Thlr. 7 Sgr. 9 Pf.

5) In einem Stalle befinden sich 36 Zug- und 10 Reitpferde; es soll auf 8 Tage nach dem Friedenssatze fouragirt werden, wie viel, ist zu empfangen?

Antw.: 66 Schffl. 8 Metzen Hafer, 92 Bund Heu und $147\frac{1}{4}$ Bund Stroh.

§. 133. Die Division der benannten Zahlen.

1ster Fall. Der Divisor und Dividend sind gleichartig und beide benannt.

Regel: Zwei gleichartige, benannte Zahlen werden durch einander dividirt, indem man ihre unbenannten Zahlen durch einander dividirt. Die erhaltene unbenannte Zahl ist alsdann der Quotientenwerth.

Beweis: Ist die Größe A = axG und die Größe B = xG, so erhält man: $\frac{A}{B} = \frac{axG}{xG} = \frac{ax}{x} = a$; denn der Quotientenwerth mit dem Divisor multiplicirt, muß wiederum den Dividenden geben, und dieß ist bei der vorstehenden Auflösung der Fall, nämlich a . (xG) = axG.

Beispiele:

1) $\frac{54\,\text{Thlr.}}{9\,\text{Thlr.}} = \frac{6.9}{9} = 6$.

2) Ein Remonte-Kommando bedarf zu einem Marsche 7488 Mtz. Hafer, und pro Tag 117 Metzen; wie lange ist dasselbe unterweges?

Auflösung: Man dividire 7488 Metzen durch 117 Metzen und der Quotientenwerth giebt die Anzahl der Marschtage an, weil jedesmal ein Tag vorüber ist, sobald 117 Metzen gefüttert worden sind.

Man hat also: $\frac{7488\,\text{Mtz.}}{117\,\text{Mtz.}} = \frac{7488}{117} = 64$ = der Anzahl der Marschtage.

3) Wie lange können 48 Pferde bei einem Futterbestande von 20 Scheffeln Hafer, die Ration à $3\frac{1}{4}$ Metzen gerechnet, gefüttert werden?

Auflösung: Wenn 1 Pferd $3\frac{1}{4}$ Metzen bekommt, so erhalten 48 Pferde $3\frac{1}{4}$. 48 Metzen täglich. Es ist daher:

$\frac{20\,\text{Scheffel}}{3\frac{1}{2}\,.\,48\,\text{Mtz.}} = \frac{320\,\text{Mtz.}}{156\,\text{Mtz.}} = 2\frac{2}{39}$ = der Anzahl Tage, auf welche das Futter reichen wird.

2ter Fall. Der Divisor ist unbenannt.

Regel: Eine benannte Zahl wird durch eine unbenannte Zahl dividirt, indem man das Maß der erstern durch die letztere dividirt, und den erhaltenen Quotientenwerth wiederum auf die Benennung des Dividenden bezieht.

Beweis: Ist die benannte Zahl xG durch a zu dividiren, so erhält man: $\frac{xG}{a} = \frac{x}{a}G$; denn der erhaltene Quotientenwerth $\frac{x}{a}G$ mit dem Divisor a multiplicirt giebt wiederum den Dividenden xG.

Beispiele:

1) $\frac{12\,\text{Pfd.}}{5} = \frac{12}{5}\,\text{Pfd.} = 2\,\text{Pfd.}\ 12\frac{4}{5}\,\text{Lth.}$

2) Vier Unteroffiziere erhalten zusammen 25 Thaler Tractament; was bekommt jeder?

Auflösung: Es wird jeder den 4ten Theil von 25 Thaler erhalten, mithin: $\frac{25\,\text{Thlr.}}{4} = 6\frac{1}{4}\,\text{Thlr.} = 6\,\text{Thlr.}\ 7\,\text{Sgr.}\ 6\,\text{Pf.}$

3ter Fall. Die zu dividirenden Zahlen sind mehrfach benannt.

Auflösung: Man reducire die mehrfach benannten Zahlen auf ihre niedrigste Ordnung, und dividire alsdann wie im ersten Falle.

Beispiele:

1) $\frac{123\,\text{Thlr.}\ 17\,\text{Sgr.}\ 5\,\text{Pf.}}{5\,\text{Thlr.}\ 27\,\text{Sgr.}\ 6\,\text{Pf.}} = \frac{44489\,\text{Pf.}}{2130\,\text{Pf.}} = 20\frac{1889}{2310}$

2) Ein Unteroffizier giebt von seinem monatlichen Gehalte à 6 Thlr. 7 Sgr. 6 Pf., täglich 6 Sgr. 3 Pf. aus; wie lange reicht er damit?

$\frac{6\,\text{Thlr.}\ 7\,\text{Sgr.}\ 6\,\text{Pf.}}{6\,\text{Sgr.}\ 3\,\text{Pf.}} = \frac{2250\,\text{Pf.}}{75\,\text{Pf.}} = 30.$ Er kommt also damit 30 Tage aus.

3) $\frac{87\,\text{Ctr.}\ 58\,\text{Pfd.}\ 4\,\text{Lth.}}{96} = \frac{(87\,.\,110+58)\,\text{Pfd.}+4\,\text{Lth.}}{96} = \frac{(9628\,.\,32+4)\,\text{Lth}}{96} = \frac{308100}{96}\,\text{Lth.} = 3209\frac{3}{8}\,\text{Lth.} = 100\,\text{Pfd.}\ 9\frac{3}{8}\,\text{Lth.}$

Ist der Dividend eine mehrfach benannte Zahl und der Divisor unbenannt, so ist es bequemer, die Division, von der höchsten Ordnung anfangend, nach dem allgemeineren Divisionsgesetz (§. 39. IV) auszuführen. Bleibt alsdann bei der Division eines Summanden ein Rest, so reducirt man denselben auf die nächst niedere Ordnung und zählt die erhaltenen Einheiten niederer Ordnung zu den übrigen gleichnamigen Einheiten des Dividenden mit hinzu; z. B.:

4) 120 Centner 28 Pfund 30 Loth dividirt durch 16.

16 | 120 Ctr. 28 Pfd. 30 Lth. = 7 Ctr. 56 Pfd. 25 Lth. 3½ Quentch.
112
8.110 = 880 Pfd.
16 | 908 Pfd. = 56 Pfd.
80
108
96
12.32 = 384 Lth.
16 | 414 Lth. = 25 Lth.
32
94
80
14.4 Quentch. = 56 Quentch.
16 | 56 Quentch. = 3½ Quentchen.
48
8
16 = ½

5) 55 Ctr. 102 Pfd. 20 Loth Pulver sollen zu gleichen Theilen unter 6 Batterien vertheilt werden, wie viel erhält jede? Antw.: 9 Ctr. 35 Pfd. 14 Lth.

§. 134. Uebungsbeispiele.

1) 336 Thlr. 17 Sgr. 3 Pf. multiplicirt mit 23 = 7741 Thlr. 6 Sgr. 9 Pf.

2) 5 Ctr. 43 Pfd. 16¾ Lth. multiplicirt mit 7⅕ = 38 Ctr. 93 Pfd. 11⅘ Lth.

3) Ein Pferd erhält täglich 3¾ Metzen Hafer 3 Pfd. Heu und 4 Pfd. Stroh, wie viel wird man für 121 Pferde auf 30 Tage empfangen müssen?

Antw.: 35 Wispel 10 Scheffel 12½ Metze Hafer,
544½ Bund Heu,
12 Schock 6 Bund Stroh.

4) Ein Infanterie-Bataillon erhält 1800 Geschützkartuschen à 1⅜ Pfd. und 900 à 2¾ Pfd. Pulver, um sie in Patronen à ⅖ Loth umzuarbeiten. Es entstehen daraus 230400 Patronen, wie viel Pulver ist bei der Arbeit verloren gegangen? Antw.: 150 Pfd.

5) Ein marschirender Truppentheil hat 5 Vorspannpferde auf 3½ Meilen benutzt, wie viel beträgt dafür die Vergütigung von 7½ Sgr. pro Pferd und Meile? Antw.: 4 Thlr. 20 Sgr. 7½ Pf.

6) Wie viel Pulver ist erforderlich, um 150—7pfge Granaten à 24 Lth. laden, und dazu 75 Kartuschen à 1½ Pfd., 300 Kartuschen à ⅜ Pfd. und 300 Kartuschen à ⅕ Pfd. fertigen zu können, wenn prō 100 Pfd. 5 Pfd. zum Vorrath gegeben werden?
Antw.: 3 Ctr. 63 Pfd. 24 Loth. (Da 5 Pfund der 20ste Theil

von 100 Pfd. ist, so besteht auch der ganze Vorrath aus dem 20sten Theile der ganzen Pulverquantität).

7) Wie groß muß die Länge der Brustwehr einer Verschanzung sein, wenn dieselbe durch 500 Mann in 2 Gliedern besetzt und für jede Rotte eine Länge von 1 Schritt vorhanden sein soll? Antw.: 50 Ruthen.

8) Ein Fourier soll für 252 Mann eine 3tägige Portion empfangen, bestehend pro Tag und Mann aus $\frac{1}{2}$ Pfd. Fleisch. 2 Loth Salz, 6 Loth Reis, 2 Pfd. Brot, und $\frac{1}{16}$ Quart Branntwein. Wie viel wird er von jedem Material empfangen, wenn der Lieferant für jede 15 Mann täglich noch eine Portion extra zu liefern hat? Antw.: 3 Ctr. 73 Pfd. $6\frac{2}{5}$ Lth. Fleisch, 50 Pfd. $12\frac{4}{5}$ Lth. Salz, 1 Ctr. 41 Pfd. $6\frac{2}{5}$ Lth. Reis, 268 Stück Brote à 6 Pfd. und $4\frac{4}{5}$ Pfd., so wie $50\frac{2}{5}$ Quart Branntwein.

9) Ein Unteroffizier geht mit 11 Gemeinen auf Kommando; er erhält einen Verpflegungs-Vorschuß von 30 Thlr. und hat davon auszugeben:

a) die Verpflegung für 12 Marschtage, mit 3 Sgr. 9 Pf. pro Tag und Mann,

b) ein 10tägiges Tractament, für sich mit 1 Thlr. 15 Sgr., und für jeden Gemeinen mit 24 Sgr. 2 Pf.,

c) Vorspann für einen 2spännigen Wagen auf $3\frac{1}{4}$ Meile, mit 7 Sgr 6 Pf. pro Pferd und Meile; wie viel hat er zurückzuliefern? Antw.: 5 Pf.

10) Wie groß ist der 17te Theil von 5712 Wispel 18 Scheffel 1 Metze? Antw.: 336 Wispel 1 Scheffel 1 Metze.

11) Wie oft ist 5° 7′ 6″ 3‴ in 185° 8′ 2″ 3‴ enthalten? Antw: 33mal.

12) Wie viel Tage werden 159 Pferde mit 4 Wispel 15 Scheffel $12\frac{3}{4}$ Metzen Hafer auskommen, wenn nach dem Feldsatze zu $3\frac{3}{4}$ Metzen gefüttert wird? Antw.: 3 Tage.

13) 1125 Mann sind auf 10 Tage mit Brot versehen, die tägliche Portion pro Mann zu 2 Pfd. gerechnet. Nach 4 Tagen kommen noch 375 Mann hinzu; wie groß wird die tägliche Portion werden müssen, wenn das Brot noch auf 5 Tage ausreichen soll? Antw.: $1\frac{4}{5}$ Pfd. = 1 Pfd. $25\frac{3}{5}$ Loth.

14) Für 117 Pferde ist auf 14 Tage Hafer vorhanden, wobei jedes Pferd täglich $3\frac{3}{4}$ Metzen erhalten kann. Wenn nun nach 7 Tagen 27 Pferde mit einem 3tägigen Futter abmarschiren, und den zurückgebliebenen täglich $\frac{1}{2}$ Metze an der Ration abgebrochen wird, wie lange werden diese dann noch Futter haben? Antw.: $9\frac{6}{13}$ Tage.

15) Ein Truppentheil empfängt 6500 Thlr. Löhnung, wobei 3462 Thlr. 7 Sgr. 6 Pf. Gehalt für Offiziere und Unteroffiziere. Wenn

nun jeder Gemeine 2 Thlr. 12 Sgr. 6 Pf. erhält, wie viel Gemeine sind bei dem Truppentheile? Antw.: 1257 Gemeine.

16) 2000 Kartuschen, à $2\frac{1}{4}$ Pfd. Pulver, sollen in andere, à $\frac{3}{8}$ Pfd., umgearbeitet werden. Wie viele dergleichen wird man erhalten, wenn beim Ausschütten der ersteren $\frac{1}{20}$ und beim Füllen der letzteren $\frac{1}{25}$ des Pulvers durch Verstauben ꝛc. verloren gegangen ist? Antw.: 10944 Kartuschen.

Auflösung: $2000 \cdot \frac{9}{4}$ Pfd. = 4500 Pfd., Verlust: $^{4}\frac{500}{20} = 225$ Pfd. 4000 Pfd. — 225 Pfd. = 4275 Pfd., Verlust $^{4}\frac{275}{25} = 171$ Pfd. bleibt Bestand: 4275 Pfd. — 171 Pfd. = 4104 Pfd., giebt Kartuschen: $4104 : \frac{3}{8} = 10944$ Stück.

17) Ein Infanterie-Bataillon hat eroberte Patronen à $\frac{2}{4}$ Lth. in Patronen zu $\frac{2}{3}$ Lth. umgearbeitet, und daraus 99000 Patronen erhalten. Wie viel eroberte Patronen waren es, wenn der 12te Theil vom Pulver bei der Arbeit ꝛc. verloren gegangen ist? Antw.: 96000 Stück.

Auflösung: 99000 gefertigte Patronen à $\frac{2}{3}$ Loth macht 66000 Lth. Pulver, $= \frac{1}{1\frac{1}{2}}$ der ganzen Menge, mithin $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$ davon $= \frac{66000}{11} = 6000$ Loth. Es enthalten also die $\frac{3}{4}$löthigen Patronen (66000 + 6000) Loth = 72000 Loth und sind folglich $\frac{72000}{\frac{3}{4}} = 96000$ Patronen erobert worden.

18) Einem Truppentheil wird als Antheil an gemachter Beute eine Menge Goldstücke mit dem Befehle überwiesen, $\frac{1}{15}$ derselben an die Unteroffiziere, den Rest aber an die Gemeinen zu vertheilen. Nachdem die Goldstücke mit $3\frac{1}{3}$ Thlr. das Stück in Silbergeld umgesetzt, und sowohl vom Antheile der Unteroffiziere, als auch vom Antheile der Gemeinen der dritte Theil den Familien der Gebliebenen zugewendet worden ist, erhalten die Unteroffiziere noch 80 Thlr. und jeder Gemeine 1 Thlr. 18 Sgr. Es ist nun die Frage:

1) Wie viel Goldstücke hatte der Truppentheil erhalten? Antw.: 540.
2) Was erhielten die Familien der Gebliebenen? = 600 Thlr.
3) Wie viel Gemeine waren beim Truppentheil? = 700.

Auflösung: Nennt man die Anzahl der Thaler der gemachten Beute einstweilen x, so ist der Antheil der Unteroffiziere $= \frac{x}{15}$ Thlr., und sie erhalten nach Abzug des dritten Theiles davon $= \frac{\frac{x}{15}}{3}$ Thlr., noch 80 Thlr. Es ist also:

$$\frac{x}{15} - \frac{x}{45} = 80 \text{ Thlr.};$$

oder: $\frac{3x}{45} - \frac{x}{45} = 80$ Thlr.

und $\frac{2x}{45} = 80$ Thlr., multiplicirt mit 45, giebt:

$2x = 80.45$, dividirt durch 2, giebt:

$x = 40.45 = 80$ Thlr.

Nun sind an Goldstücken vorhanden: $\frac{1800 \text{ Thlr.}}{\frac{10}{3} \text{ Thlr.}} = 540$ Stück.

Die Unteroffiziere erhalten $\frac{1800}{15}$ Thlr. $= 120$ Thlr. und die Familien $\frac{120}{3}$ Thlr. $= 40$ Thlr.; die Gemeinen 1800 Thlr. — 120 Thlr. = 1680 Thlr. und ihre Familien $\frac{1680}{3} =$ 560 Thlr. mithin die Familien der Gebliebenen im Ganzen 600 Thlr.

Unter die Gemeinen bleibt endlich noch zu vertheilen: 1680 Thlr. — 560 Thlr. = 1120 Thlr. und jeder bekommt 1 Thlr. 18 Sgr.; ihre Anzahl ist daher $= \frac{1120}{1\frac{8}{5}} = \frac{1120.5}{8} =$ $140.5 = 700$ Gemeine.

VI. Abschnitt.

Die Proportionen und ihre Anwendungen auf practische Rechnungen.

Dreizehntes Kapitel.

Von den arithmetischen und geometrischen Proportionen.

§. 135. Unter einer Proportion versteht man die Verbindung zweier gleichen Differenzen oder Quotienten durch das Gleichheitszeichen. Hiernach sind: $a - b = c - d$ und $a : b = c : d$ Proportionen, von denen die erstere eine arithmetische und die letztere eine geometrische genannt wird.

Man liest diese Proportionen: a zu b wie c zu d, und

nennt die Zahlen a, b, c und d die Glieder, so wie die Differenzen oder Quotienten rechts und links vom Gleichheitszeichen die Verhältnisse der Proportionen.

Von den vier Ausdrücken in der Proportion: $a:b=c:d$ werden a und d die äußern, b und c die innern Proportionsglieder, so wie a und c vordere, und b und d hintere Verhältnißglieder genannt. Je zwei vordere oder hintere Verhältnißglieder heißen auch die homologen oder gleichliegenden Glieder der Proportion.

Sind in einer Proportion die Hinterglieder größer als die Vorderglieder, so wird dieselbe eine steigende genannt, findet aber das Gegentheil statt, so heißt dieselbe fallend.

Sind drei Glieder a, b und c einer Proportion gegeben, und soll dazu ein viertes Glied bestimmt werden, so heißt letzteres die vierte Proportionalzahl zu a, b und c, und man hat alsdann die Gleichung: $a:b=c:x$, wo x einstweilen die zu bestimmende Zahl vertritt. Sind die beiden mittleren Glieder einer Proportion, wie z. B. in $a:b=b:c$, einander gleich, so wird die Proportion eine stetige genannt. In diesem Falle heißt die Zahl c die dritte Proportionalzahl zu a nnd b, und die Zahl b die mittlere Proportionalzahl zu a und c.

A. Arithmetische Proportionen.

§. 136. Lehrsatz: In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der beiden äußern Glieder gleich der Summe der beiden innern.

Ist $a-b=c-d$, so soll auch sein:

$$a+d=b+c.$$

Beweis: Addirt man in der Gleichung $a-b=c-d$ zu beiden Seiten erst b, und sodann auch d, so fallen die Subtrahenden weg und man erhält: $a+d=b+c$.

Umgekehrt kann man aus zwei gleichen Summen wiederum eine arithmetische Proportion bilden, nämlich:

$a+d=b+c$ giebt:

$a-b=c-d$,

oder: $d+m=a+b-c+\sqrt{n}$, giebt:

$d-(a+b-c)=\sqrt{n}-m$.

§. 137. Mittelst des vorstehenden Lehrsatzes kann man zu drei gegebenen Gliedern einer arithmetischen Proportion das vierte finden, und zwar, wenn das gesuchte Glied ein äußeres ist, indem man von der Summe der beiden innern Glieder das andere äußere subtrahirt; z. B.:

1) $a-b=c-x.$
$a+x=b+c$
$x=(b+c)-a.$

2) $5-\frac{2}{3}=(-\frac{1}{2})-x.$
$x=(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})-5=\frac{1}{6}-5=\frac{1-30}{6}=-\frac{29}{6}.$

Der Lehrsatz des §. 136 giebt zugleich das Mittel an, die Richtigkeit einer arithmetischen Proportion zu prüfen, so daß auch, wenn in die letztere Proportion der für x gefundene Werth gesetzt wird

$5-\frac{29}{6}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$ sein muß,

oder: $\frac{30-29}{6}=\frac{4-3}{6}$

$\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$

3) $6-3=x-12$
$6+12=3+x$
$15=x$

§. 138. Aufgabe. Man soll das arithmetische Mittel (d. i. die mittlere arithmetische Proportionalzahl) zu zwei oder mehreren Zahlen finden.

Auflösung: Man dividire die Summe der gegebenen Zahlen durch die Anzahl der Summanden, so giebt das Resultat das verlangte arithmetische Mittel.

Beispiele;

1) Welche Zahl ist das arithmetische Mittel von $\frac{3}{4}$ und $\frac{3}{7}$?

Auflösung: $(\frac{3}{4}+\frac{3}{7}):2=\frac{21+12}{28}:2=\frac{33}{56}.$

Beweis: Nennt man die gesuchte mittlere Proportionalzahl einstweilen x, so ist nach §. 135:

$\frac{3}{4}-x=x-\frac{3}{7}$
$2x=\frac{3}{4}+\frac{3}{7}$
$2x=\frac{33}{28}$
$x=\frac{33}{56}.$

2) Es soll zu 3, 4,5 und 6 das arithmetische Mittel bestimmt werden.

Auflösung: $x=\frac{3+4+5+6}{4}=\frac{18}{4}=4\frac{1}{2}.$

Beweis: Wendet man das obige Verfahren wiederholt an, so ist:

$\frac{7}{2}$ $\frac{9}{2}$ $\frac{11}{2}$

$\frac{16}{4}$ $\frac{20}{4}$

4 5

$\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}.$

3) Beim Pulverprobiren erhielt man folgende Wurfweiten: 80°, $73\frac{1}{2}$°, 75°, 82°, $80\frac{1}{2}$°; man soll die mittlere Wurfweite für das in Anwendung gebrachte Pulver aus den gethanen 5 Würfen bestimmen.

Auflösung: $x = \frac{80+73\frac{1}{2}+75+82+80\frac{1}{2}}{5} = 78{,}2° = 78°2'$.

4) Ein Kaufmann mengt 3 Sorten Taback unter einander, und zwar kostet das Pfund der 1sten Sorte 8 Sgr. 3 Pf., das der 2ten 12 Sgr. 4 Pf., und das der 3ten 14 Sgr. 9 Pf.; welchen Werth hat ein Pfund der Mengung? Antw.: 11 Sgr. $9\frac{1}{3}$ Pf.

§. 139. Aufgabe. Man soll die dritte arithmetische Proportionalzahl zu 6 und 9 finden.

Auflösung: $6-9 = 9-x$

$x = 18-6 = 12$.

B. Geometrische Proportionen.

§. 140. Lehrsatz. In jeder geometrischen Proportion ist das Product der äußern Glieder gleich dem Product der innern.

Voraussetzung: $a:b = c:d$

Behauptung: $ad = bc$.

Beweis: Multiplicirt man in der Gleichung $a:b = c:d$ zuerst beide Seiten mit b und sodann auch mit d, so fallen die Nenner weg, und es wird $ad = bc$, was zu beweisen war.

Nach diesem Lehrsatze findet man zu den Zahlen a, b und c die vierte Proportionalzahl x, wie folgt:

1) $a:b = c:x$.

$ax = bc$.

$x = \frac{bc}{a}$.

In Worten: „Das vierte Glied einer geometrischen Proportion wird gefunden, wenn man das Product der beiden mittlern Glieder durch das erste Glied dividirt."

2) $a:b = b:x$.

$x = \frac{b^2}{a}$.

3) $a:x = x:b$.

$x^2 = ab$. Durch 2 radicirt, giebt:

$\sqrt{x^2} = \sqrt{ab}$

$x = \sqrt{ab}$.

In Worten: „Man findet zu zwei gegebenen Zahlen die mittlere geometrische Proportionalzahl, wenn man aus dem Product dieser Zahlen die Quadratwurzel zieht."

Der Lehrsatz dieses §. giebt zugleich das Mittel an, die Richtigkeit einer geometrischen Proportion zu prüfen. Setzt man daher in 3 den für x gefundenen Werth, so muß $a:\sqrt{ab} = \sqrt{ab}:b$ gleiche Producte geben, nämlich:

$$ab = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}$$
$$ab = \sqrt{ab^2}$$
$$ab = ab.$$

Nach unserem Lehrsatze läßt sich nun auch jede Productengleichung in eine Proportion umformen, indem man die Factoren der einen Seite zu äußeren und die der andern zu mittleren Gliedern macht; z. B.:

$ad = bc$ giebt:
$a:b = c:d$ oder auch:
$b:d = a:c$.

Noch läßt sich in jeder geometrischen Proportion jedes Glied durch die drei andern ausdrücken, z. B.:

$$a:b = c:d \begin{cases} a = \frac{bc}{d}. \\ b = \frac{ad}{c}. \\ c = \frac{ad}{b}. \\ d = \frac{bc}{a}. \end{cases}$$

§. 141. Jede geometrische Proportion läßt sich durch Versetzung ihrer Glieder auf eine achtfache Weise umformen.

1) $a:b = c:d$.
2) $c:d = a:b$; Versetzung der Verhältnisse.
3) $b:a = d:c$; Umdrehung der Verhältnisse.
4) $d:c = b:a$; Umdrehung der ganzen Proportion.
5) $a:c = b:d$
6) $b:d = a:c$
7) $c:a = d:b$
8) $d:b = c:a$

} Versetzung der homologen Glieder.

Beweis: In sämmtlichen Umformungen ist $ad = bc$.

§. 142. Jede geometrische Proportion läßt sich durch Addition und Subtraction, wie folgt, umformen.

Wenn $a:b = c:d$, so ist auch:

1) $(a+c):(b+d) = a:b = c:d$.
2) $(a-c):(b-d) = a:b = c:d$.
3) $(a+b):a = (c+d):c$.
4) $(a+b):b = (c+d):d$.
5) $(a-b):a = (c-d):c$.
6) $(a-b):b = (c-d):d$.

7) $(a+b):(c+d)=(a-b):(c-d)$.

8) $(a+c):(b+d)=(a-c):(b-d)$.

In Worten:

1 und 2) „In jeder geometrischen Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied."

3 und 4) „In jeder geometrischen Proportion verhält sich die Summe des 1sten und 2ten Gliedes zum 1sten oder 2ten Gliede, wie die Summe des 3ten und 4ten Gliedes zum 3ten oder 4ten Gliede."

5 und 6) „In jeder geometrischen Proportion verhält sich die Differenz des 1sten und 2ten Gliedes zum 1sten oder 2ten Gliede, wie die Differenz des 3ten und 4ten Gliedes zum 3ten oder 4ten Gliede."

7) „Es verhält sich in jeder geometrischen Proportion die Summe des 1sten und 2ten Gliedes zur Summe des 3ten und 4ten Gliedes, wie die Differenz des 1sten und 2ten Gliedes zu der Differenz des 3ten und 4ten Gliedes."

8) „In jeder geometrischen Proportion verhält sich die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder, wie die Differenz der Vorderglieder zur Differenz der Hinterglieder."

Beweise:

In allen Proportionen 1 bis 8 giebt das Product der innern und äußern Glieder übereinstimmend mit der Grundgleichung $ad=bc$, woraus hervorgeht, daß die bewirkten Umformungen richtig sind.

N. 7 und 8 kann man auch, wie folgt, beweisen:

ad 7. $(a+b):(c+d)=b:d$ aus N. 4.
$(a-b):(c-d)=b:d$ aus N. 5.
daher: $(a+b):(c+d)=(a-b):(c-d)$.

ad 8. Es war: $(a+c):(b+d)=a:b$ aus N. 1.
$(a-c):(b-d)=a:b$ aus N. 2.
daher: $(a+c):(b+d)=(a-c):(b-d)$. §. 9.

§. 143. Sind mehrere gleiche Verhältnisse gegeben, so erhält man durch Addition oder Subtraction der homologen Glieder neue Verhältnisse, welche jedem der gegebenen gleich sind.

Gegeben: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$.

Es soll sein: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-e}{b-f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$ u. s. w.

Beweis: Da die Verhältnisse $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ als gleich gegeben sind, so muß für jedes Verhältniß eine Zahl existiren, mit welcher der Zähler und Nenner gehoben werden kann, und durch

welche dieselben in einen und denselben Quotienten, etwa $\frac{x}{z}$, übergehen. Wäre nun der gemeinschaftliche Theiler des 1sten Verhältnisses m, der des 2ten n und der des 3ten p, so ist, wenn $\frac{a}{b}$ durch m gehoben $\frac{x}{z}$ giebt, wiederum $\frac{xm}{zm} = \frac{a}{b}$, und die obigen Verhältnisse lassen sich in folgender Gestalt ausdrücken:

$$\frac{mx}{mz} = \frac{nx}{nz} = \frac{px}{pz} = \frac{mx+nx}{mz+nz} = \frac{mx-px}{mz-pz} = \frac{mx+nx+px}{mz+nz+pz} \text{ u. s. w.,}$$

oder: $$\frac{mx}{mz} = \frac{nx}{nz} = \frac{px}{pz} = \frac{(m+n)x}{(m+n)z} = \frac{(m-p)x}{(m-p)z} = \frac{(m+n+p)x}{(m+n+p)z}.$$

Hebt man nun wieder im Zähler und Nenner durch den gemeinschaftlichen Factor, so erhält man für sämmtliche Verhältnisse ein und denselben Quotienten, nämlich $\frac{x}{z}$, woraus folgt, daß die im Lehrsatze ausgesprochene Behauptung richtig ist.

Anmerkung: Das vorstehende Gesetz enthält den Ansatz für die sogenannte Gesellschaftsrechnung.

§. 144. Einige Anwendungen der in den vorstehenden §§. gegebenen Proportions-Umformungen mittelst Addition und Subtraction.

1) Gegeben: $x+y=10$ und $4 : x = 5 : y$; man soll x und y in bestimmten Zahlen ausdrücken.

Aus der Proportion $4 : x = 5 : y$ kann man nach §. 142. 1 bilden:

$$4+5 : x+y = 5 : y$$

d. i. $$9 : 10 = 5 : y$$

$$y = \frac{50}{9} = 5\frac{5}{9};$$

und da $x+y=10$ gegeben war, so ist auch

$$x+\frac{50}{9} = 10, \text{ und } \frac{50}{9} \text{ auf beiden Seiten subtrahirt:}$$

$$x = 10 - \frac{50}{9} = \frac{90-50}{9} = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}.$$

Probe: Man setze die gefundenen Werthe für x und y in die gegebene Proportion, so muß das Product der innern Glieder gleich dem Producte der äußern sein. Man erhält:

$$4 : \frac{40}{9} = 5 : \frac{50}{9},$$

daher: $\frac{40.5}{9} = \frac{50.4}{9}$, mit 9 multiplicirt

$40.5 = 50.4$, durch 10 dividirt

$4.5 = 5.4$

$20 = 20$ d. h. die Werthe von x und y sind richtig bestimmt worden.

2) Gegeben: $x-y=3$ und
$2 : x = 4 : y.$
Man hat: $2-4 : x-y = 4 : y$
$-2 : 3 = 4 : y$
$y = -6$
$x = -3.$

3) Zwei Zahlen verhalten sich wie 3 : 5 und ihre Summe ist = 20.
Auflösung: Nennt man die zu suchenden Zahlen einstweilen x und y, so erhält man der Aufgabe gemäß folgende Gleichungen: $x+y=20$
$x : y = 3 : 5$ und nach §. 142. 4
$x+y : y = 3+5 : 5$
$20 : y = 8 : 5$
$y = \frac{20}{2} = 12\frac{1}{2}$
$x = 20 - 12\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}.$

§. 145. Jede geometrische Proportion läßt sich durch Multiplication und Division, wie folgt, umformen:

Wenn gegeben: $a : b = c : d,$
so ist auch: 1) $an : bn = c : d$
2) $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = c : d$
3) $an : bn = cn : dn$
4) $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}.$

In Worten: „Eine geometrische Proportion bleibt richtig, wenn man die Glieder eines Verhältnisses, oder auch die ganze Proportion mit einer und derselben Zahl multiplicirt, oder durch dieselbe dividirt."

5) $an : b = cn : d$
6) $a : bn = c : dn$
7) $\frac{a}{n} : b = \frac{c}{n} : d$
8) $a : \frac{b}{n} = c : \frac{d}{n}.$

In Worten: „Eine geometrische Proportion bleibt richtig, wenn man die homologen Glieder mit einer und derselben Zahl multiplicirt, oder durch dieselbe dividirt."

9) $an : b = c : \frac{d}{n}$
10) $a : bn = \frac{c}{n} : d.$

In Worten: „Eine geometrische Proportion bleibt richtig,

wenn man ein äußeres oder inneres Glied mit einer Zahl multiplicirt, und das andere äußere oder innere Glied durch dieselbe Zahl dividirt.

Die Beweise für alle diese Sätze ergeben sich unmittelbar aus der Bruchrechnung, z. B.:

ad 9. Es sei: $a:b = c:d$,

oder: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Multiplicirt man nun diese gleichen Quotienten mit einer Zahl n, so kann man entweder den Zähler multipliciren, oder den Nenner dividiren, und man erhält: $\frac{an}{b} = \frac{c}{d:n}$

d. i. $an:b = c:\frac{d}{n}$.

§. 146. Die Multiplikation der Glieder eines Verhältnisses oder der homologen Glieder wendet man an, um Brüche aus einer Proportion fortzuschaffen, z. B.:

1) $1\frac{1}{2} : 5 = 7\frac{1}{4} : x$

$\frac{3}{2} : 5 = \frac{29}{4} : x$. Die Vorderglieder mit 4 multiplicirt,

giebt: $6:5 = 29:x$.

2) $\frac{5}{4} : \frac{7}{8} = 9:x$. Die Glieder des ersten Verhältnisses mit 8 multiplicirt, giebt:

$10:7 = 9:x$.

Die Division wendet man an, um die Glieder einer Proportion zu vereinfachen, z. B.:

$4000:1500 = 55000:x$. Die Vorderglieder durch 500 divid.,

giebt: $8:1500 = 110:x$. Das erste Verhältniß durch 4 divid.,

giebt: $2:375 = 110:x$. Die Vorderglieder durch 2 divid.,

giebt: $1:375 = 55:x$.

§. 147. Multiplicirt man die homologen Glieder zweier oder mehrerer Proportionen mit einander, oder dividirt man solche durch einander, so erhält man aufs Neue eine richtige Proportion, z. B.:

1) $a:b = c:d$

$m:n = p:q$

$am:bn = cp:dq$;

oder: $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{p} : \frac{d}{q}$.

2) $a:n = c:d$

$n:m = e:f$

$m:q = g:h$

$a:q = ceg:dfh$.

In diesem Beispiele hat man sogleich im Zähler und Nenner n gegen n, und m gegen m gehoben.

Beweis: ad 1. Multiplicirt man zwei gleiche Quotienten mit zwei andern gleichen Quotienten, so giebt dies, nach §. 32. III., wiederum Gleiches. Zwei Quotienten werden aber multiplicirt, indem man sowohl die Zähler als auch die Nenner mit einander multiplicirt. §. 46. 7.

§. 148. Hat man mehrere gleiche Verhältnisse, z. B.:

$$a:b = c:d = e:f = g:h \text{ u. s. w.,}$$

so kann man daraus folgende Proportionen bilden:

$$a:c = b:d$$
$$a:e = b:f$$
$$a:g = b:h,$$

in welchen alle 1sten und 3ten Glieder einander gleich sind. Man schreibt alsdann für diese Proportionen kürzer:

$$a:c:e:g = b:d:f:h,$$

und nennt diese Form eine fortlaufende Proportion, so wie jede Seite derselben ein fortlaufendes Verhältniß.

§. 149. Aufgabe. Aus mehreren gegebenen Proportionen eine fortlaufende Proportion zu bilden.

Auflösung: Gegeben ist: $a:b = 2:3$
$b:c = 4:5.$

Man sehe zuvörderst nach, ob sich durch eine einfache Umstellung der Glieder vielleicht fortlaufende Verhältnisse ergeben. In unserem Beispiele ist dies theilweise der Fall, wenn man die Verhältnisse der zweiten Proportion umkehrt; man erhält hierdurch:

$$a:b = 2:3$$
$$c:b = 5:4.$$

Um nun aber auch die vierten Glieder der gegebenen Proportionen unter sich gleich zu machen, wende man das Verfahren an, wodurch Brüche auf gleiche Benennung gebracht werden. Man dividire also mit jedem Hinterglied (Nenner) in den Generalnenner 12 und multiplicire mit dem, was herauskommt, beide Glieder des Verhältnisses (Zähler und Nenner). Diesem gemäß gehen die obigen Proportionen in folgende über: $a:b = 8:12$
$c:b = 15:12$
d. i. $a:b:c = 8:12:15.$

§. 150. Aufgabe. Es sind die Proportionen:

1) $a:b = 4:5$
2) $b:c = 2:3$
3) $b:d = 7:6$

gegeben, man soll das fortlaufende Verhältniß $a:b:c:d$ bilden.

Auflösung: Man dividire die 2te Proportion durch die 3te, dies giebt: $1 : \frac{c}{d} = \frac{2}{7} : \frac{3}{6}$,

oder: $d : c = 12 : 21 = 4 : 7$. Setzt man nun diese Proportion in die Stelle der 3ten, so hat man das fortlaufende Verhältniß a:b:c:d gebildet, und es findet sich dazu das fortlaufende Verhältniß der 3ten und 4ten Proportionsglieder nach der vorigen Aufgabe.

Man hat also: $a : c = 4 : 5$
$b : c = 2 : 3$
$d : c = 4 : 7$.

Generalnenner: $3.5.7 = 105$.

$a : c = 3.7.4 : 105$	$a : c = 84 : 105$
$b : c = 5.7.2 : 105$	$b : c = 70 : 105$
$d : c = 3.5.4 : 105$	$d : c = 60 : 105$,

also ist: $a : b : c : d = 84 : 70 : 105 : 60$.

§. 151. Aufgabe. Man soll das fortlaufende Verhältniß: A:B:C:D:E in bestimmten Zahlen ausdrücken, wenn gegeben ist: 1) $A : B = 3 : 5$
2) $A : C = 4 : 9$
3) $B : D = 10 : 7$
4) $C : E = 7 : 6$.

Man multiplicire die 1ste Proportion mit der 3ten,

$A : B = 3 : 5$
$B : D = 10 : 7$

giebt: $A : D = 30 : 35 = 6 : 7$.

Um nun auch die 4te Proportion in ein fortlaufendes Verhältniß zu bringen, dividire man die 2te durch die 4te.

$A : C = 4 : 9$
$E : C = 6 : 7$

$\frac{A}{E} : 1 = \frac{2}{3} : \frac{9}{7}$

$A : E = 14 : 27$, und diese Proportion in Stelle der 4ten gesetzt, giebt: $A : B = 3 : 5$
$A : C = 4 : 9$
$A : D = 6 : 7$
$A : E = 14 : 27$.

Kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches der 3ten Glieder = 84; daher: $A : B = 3 : 5 = 84 : 140$
$A : C = 4 : 9 = 84 : 189$
$A : D = 6 : 7 = 84 : 98$
$A : E = 14 : 27 = 84 : 162$

$A : B : C : D : E = 84 : 140 : 189 : 98 : 162$.

Anderes Beispiel: A:B = 3:5
C:D = 6:3
E:B = 7:1
D:A = 2:3.
Man findet: A:B:C:D:E = 3:5:4:2:35.

§. 152. Sind zwei gleichartige Größen A und B durch die benannten Zahlen aG und bG ausgedrückt, so nennt man den Quotienten ihrer Maße, also $\frac{a}{b}$ oder a:b, das Verhältniß dieser Größen, und sind zwei Größenverhältnisse einander gleich, z. B. 5 Pfd.:12 Pfd. = 4⅛ Thlr.:10 Thlr., so heißt eine solche Gleichung eine Größenproportion. Will man Größenproportionen umformen, d. h. mit ihnen rechnen, so sind es, nach §. 133. 1, wiederum nur ihre Maße (unbenannten Zahlen), mit welchen wirklich gerechnet werden kann. Es lassen sich also dieselben Umformungen, die wir früher für Zahlenproportionen hingestellt haben, auch auf die Größenproportionen in Anwendung bringen. Ist daher die Größenproportion: a Thlr.:b Thlr. = c Pfd.:d Pfd. gegeben, und man soll damit rechnen, so erhält man zunächst a:b = c:d, welche Proportion, und mithin auch die ihr gleiche Größenproportion, nach den früheren Sätzen umgeformt werden kann.

§. 153. Von den vier Größen einer geometrischen Größenproportion stehen immer je zwei in einer solchen Beziehung zu einander, daß eine Vermehrung oder Verminderung der einen, auch eine ebenmäßige Vermehrung oder Verminderung der andern bedingt, wie z. B. je mehr Waare, desto größer der Preis, und je weniger Waare desto geringer der Preis; oder auch umgekehrt, es hängen die Größen dergestalt von einander ab, daß eine Vermehrung oder Verminderung der einen eine Verminderung oder Vermehrung der anderen bedingt, wie z. B. je mehr Zeit zu gleicher Arbeit, desto weniger Arbeiter, und je weniger Zeit desto mehr Arbeiter. Größen, welche in einer derartigen Abhängigkeit zu einander stehen, werden proportionirte Größen genannt, und man sagt bei einer Abhängigkeit der ersteren Art, die Größen stehen in geradem (directem)

Verhältniſſe, und im letzteren Falle, die Größen ſtehen in ungeradem (indirectem) Verhältniſſe.

§. 154. Sind von den vier Größen, welche eine geometriſche Proportion bilden, nur drei gegeben, wie z. B. in der Proportion des §. 152 „5 Pfd. : 12 Pfd. = $4\frac{1}{2}$ Thlr. : x Thlr.", wenn anſtatt der anfänglich gegebenen 10 Thlr. x Thlr. geſetzt werden, ſo iſt dieſe Proportion nur unter der Vorausſetzung als richtig zu betrachten, daß unter x die Zahl 10 gedacht wird. Die Zahl aber, die man für x ſetzen muß, damit die Proportion eine richtige wird, ergiebt ſich nach §. 140. 1. Es iſt alſo:

$$5:12 = \tfrac{2.5}{6}:x$$
$$5:2 = 25:x$$
$$1:2 = 5:x$$
$$x = \frac{2.5}{1} = 10.$$

Vierzehntes Kapitel.

Von der einfachen und zuſammengeſetzten Regula de tri.

A. Die einfache Regula de tri.

§. 155. Die einfache Regula de tri umfaſſt alle Aufgaben, bei welchen aus 3 gegebenen Größen eine 4te unbekannte, den erſteren proportionirte Größe gefunden werden ſoll.*) Bilden in einer Regula de tri-Aufgabe die Größen

*) Die Proportions-Rechnungen gehören ſämmtlich der Algebra an, und ſie bilden daher auch keine beſonderen Rechnungsarten (Operationen) §. 7., ſondern nur Beſtimmungsgleichungen, die nach den Regeln der Algebra aufgelöſt werden. Dieſe Regeln hat man jedoch für die gewöhnliche Rechnenkunſt beſonders zuſammengeſtellt, ſo daß man mittelſt derſelben im Stande iſt, eine Menge Aufgaben des gewöhnlichen Lebens, ſobald die darin vorkommenden Größen einander proportionirt ſind, auch ohne Kenntniß der Algebra, aufzulöſen.

unter ſich gerade Verhältniſſe, ſo hat man eine gerade, und bilden die Größen ungerade Verhältniſſe, ſo hat man eine ungerade Regula de tri.

Iſt die unbekannte Größe aus mehr als 3 gegebenen Größen zu beſtimmen, ſo heißt die für dieſen Fall in Anwendung zu bringende Rechnung die zuſammengeſetzte Regula de tri. Noch unterſcheidet man eine Regula quinque, wenn zu 5 proportionirten Größen eine 6te, und eine Regula septem, wenn zu 7 proportionirten Größen eine 8te zu beſtimmen iſt.

§. 156. Bei allen Aufgaben, in welchen proportionirte Größen gegenſeitig durch einander zu beſtimmen ſind, iſt die Bildung des Rechnungsanſatzes die Hauptſache. Für dieſen Zweck hat man ſich zunächſt zu fragen, ob die gegebenen und geſuchten Größen in geradem oder ungeradem Verhältniſſe ſtehen.

Beiſpiel: Sollen die vier Größen A, A′, B, B′ eine Proportion bilden, und man findet:

1) daß eine Vermehrung oder Verminderung von A eine ebenmäßige Vermehrung oder Verminderung von B bedingt, ſo hat man directe Verhältniſſe, und es gilt alsdann der Anſatz:

$$A : A' = B : B',$$

z. B.: 3 Pfd. Waare koſten 4 Thlr., was koſten $5\frac{1}{2}$ Pfd. von derſelben Waare? In dieſem Beiſpiele hat man gerade Verhältniſſe, indem doppelt ſo viele Waare auch doppelt ſo viel Geld koſtet, mithin gilt der Anſatz:

3 Pfd. : $5\frac{1}{2}$ Pfd. = 4 Thlr. : x Thlr.

3 : $\frac{11}{2}$ = 4 : x

$x = 7\frac{1}{3}$, und da man x Thlr. ſuchte, ſo hat man auch den Preis für $5\frac{1}{2}$ Pfd. = $7\frac{1}{3}$ Thlr. gefunden.

Auf gleiche Weiſe bildet man den Anſatz, wenn in einer Aufgabe die proportionirten Größen: Arbeit und Lohn, Geſchwindigkeit der Bewegung und der zurückgelegte Weg bei einerlei Zeit, Kapital und Zinſen bei einem und demſelben Zinsfuße u. dgl. m. gegeben ſind.

Findet man aber:

2) daß eine Vermehrung oder Verminderung von A eine ebenmäßige Verminderung oder Vermehrung von B nach

sich zieht, so hat man indirecte Verhältnisse, und der Ansatz ist alsdann:

$$A : A' = B' : B.$$

Z. B. Eine gewisse Arbeit wird in 20 Stunden von 4 Arbeitern gefertigt; wie viel Arbeiter sind erforderlich, wenn dieselbe Arbeit ein anderes Mal in 10 Stunden ausgeführt werden soll?

Da dieselbe Arbeit in der halben Zeit auszuführen ist, so sind offenbar doppelt so viele Arbeiter als das erste Mal erforderlich, und man hat daher ungerade Verhältnisse. Würde man nun schreiben:

20 Stunden: 10 Stunden = 4 Arbeiter: x Arbeiter,

so kämen 2 Arbeiter heraus, von welchen man aber nach den im gewöhnlichen Leben üblichen Annahmen nicht dasselbe verlangt, was 4 Arbeiter in doppelter Arbeitszeit leisten können. Kehrt man aber das zweite Verhältniß um, also

20 Stunden : 10 Stunden = x Arbeiter : 4 Arbeiter,

so erhält man x = 8 Arbeiter, welches Resultat den Annahmen des Lebens entspricht.

Auf gleiche Weise bildet man den Ansatz, wenn in einer Aufgabe die proportionirten Größen: Zinsfuß und Kapital bei ein und denselben Interessen, die Geschwindigkeit der Bewegung und die Zeit bei einem und demselben Wege, die Anzahl der Ellen und die Breite des Tuches zu einem und demselben Kleidungsstücke u. dgl. m. gegeben sind.

Setzt man die vorstehend für x gefundenen Werthe in ihre beziehlichen Proportionen, so werden dieselben in beiden Fällen richtig, und es giebt daher die Substitution des gefundenen Werthes in die gebildete Proportion keine Probe für den richtigen Ansatz ab, sondern nur ein Kennzeichen, daß die Rechnung für den jedesmaligen Ansatz richtig geführt worden ist.

Als practische Regel für die Bildung des Ansatzes bemerke man Folgendes:

„Man setze die beiden gegebenen gleichartigen Größen in das erste Verhältniß, und zwar die Fragezahl als 2tes Glied, und demnächst bei directen Verhältnissen die gesuchte Größe in das 4te, und bei indirecten in das 3te Glied der zu bildenden Proportion."

Beweis. 1) Hat man die proportionirten Größen:
A Thlr., A' Thlr., B Pfd. Waare und X Pfd. Waare, so ist, wenn A' als das nfache von A gedacht wird, auch X das nfache von B. Bildet man nun aus den gleichartigen Größen Verhältnisse (Quotienten), so ist:

A Thlr. : A′Thlr. = A Thlr. : nA Thlr. = 1 : n (§. 133), und
B Pfd. : X Pfd. = B Pfd. : nB Pfd. = 1 : n, mithin nach §. 9

A Thlr. : A′Thlr. = B Pfd. : X Pfd., welche Gleichung den Ansatz für die gerade Regeldetri enthält.

2) Hat man dagegen die proportionirten Größen:
A Arbeiter, A′ Arbeiter, B Stunden und X Stunden, so ist, wenn A′, in Bezug auf eine und dieselbe Arbeit, als das n fache von A gedacht wird, $X = \frac{B}{n}$, insofern zu derselben Arbeit jetzt nur der nte Theil der Zeit nöthig ist.
Bildet man nun wieder Verhältnisse, so ist:

A Arbeiter : A′ Arbeiter = A Arbeiter : nA Arbeiter = 1 : n

B Stunden : X Stunden = B Stunden : $\frac{B}{n}$ Stunden = 1 : $\frac{1}{n}$ = n : 1,

und wenn man die Verhältnisse umkehrt:

X Stunden : B Stunden = 1 : n.

Es sind also beide Größenquotienten dem Quotienten ihre Maße gleich, folglich ist auch:

A Arbeiter : A′ Arbeiter = X Stunden : B Stunden, welche Gleichung den Ansatz für die ungerade Regeldetrie enthält.

Beispiele:

1) Man weiß, daß 20½ Pfd. Pulver 8 Thlr. 14 Sgr. 2 Pf. kosten, was wird 1¼ Ctr. von derselben Sorte kosten?

Auflösung: Der Anfänger drücke die Aufgabe, wie folgt, aus:

20½ Pfd. kosten 8 Thlr. 14 Sgr. 2 Pf.
137½ Pfd.? x Thlr.

und nach der Regel ergiebt sich folgender Ansatz:

$\frac{41}{2} : \frac{275}{2}$ = 8 Thlr. 14 Sgr. 2 Pf. : x
41 : 275 = 4 Thlr. 7 Sgr. 1 Pf. : x
61 : 275 = 12 Thlr. 21 Sgr. 3 Pf. : x

$$x = \frac{(12\text{ Thlr. }21\text{ Sgr. }3\text{ Pf.}).275}{61} = \frac{3494\text{ Thlr. }23\text{ Sgr. }9\text{ Pf.}}{61}$$

x = 57 Thlr. 8 Sgr. 9 Pf.

2) In welcher Zeit werden 27 Arbeiter einen Graben ausheben, zu welchem 15 Arbeiter 18 Tage gebraucht haben?

Auflösung: Man hat ungerade Verhältnisse, mithin ist:

15 Arbeiter : 27 Arbeiter = x Tage : 18 Tage.
5 : 9 = x : 18
5 : 1 = x : 2
x = 2.5 = 10 Tage.

3) Jemand legt stündlich 1¼ Meile zurück, und braucht zu einem gewissen Weg 8 Stunden; in wie viel Zeit wird er denselben Weg zurücklegen, wenn er stündlich 1¾ Meilen macht?

Auflösung: Da der Reisende schneller reist, so braucht er weniger Zeit. Man hat daher indirecte Verhältnisse, und es ist:

$1\frac{1}{2}$ Meile : $1\frac{3}{4}$ Meilen = x Stunden : 8 Stunden.

x = 6 Stunden 51 Minuten $25\frac{5}{7}$ Secunden.

4) Der Bedarf an Brennmaterial ist für ein Laboratorium zu $9\frac{1}{2}$ Haufen 6 Fuß langes kiefernes Klobenholz veranschlagt; wie groß wird der Bedarf angenommen werden müssen, wenn die Lieferung in 7 Fuß langen Kloben geleistet wird?

6 Fuß : 7 Fuß = x Haufen : $9\frac{1}{2}$ Haufen.

x = $8\frac{1}{7}$ Haufen; oder, wenn der Haufen aus $4\frac{1}{2}$ Klafter, und die Klafter aus 120 Kloben besteht:

x = 36 Klaftern $77\frac{1}{7}$ Kloben.

5) Wenn zu einer gewissen Anzahl Kartuschbeutel 120 Ellen $\frac{3}{4}$ breiter Etamin erforderlich ist, wie viel Ellen wird man brauchen, wenn der Etamin $\frac{5}{6}$ Ellen breit liegt?

$\frac{3}{4} : \frac{5}{6}$ = x Ellen : 120 Ellen

3 : 5 = x : 120

3 : 1 = x : 24

x = 72 Ellen.

§. 157. Uebungsbeispiele für die einfache, directe und indirecte Regula de tri.

1) Wenn 10 Pfd. Brot $6\frac{1}{2}$ Sgr. kosten, wie viel Brot erhält man für 1 Thlr.?

Antw.: 46 Pfd. $4\frac{12}{13}$ Lth.

2) Wie viel betragen 125 Rheinländische Fuß in Londoner Fuß, wenn sich der Rheinländische Fuß zum Londoner Fuß verhält wie 1391830 : 1351134?

Auflösung: Aus der gegebenen Proportion folgt 1351134 Rheinl. Fuß = 1391830 Londoner, mithin ist der Ansatz:

1351134 Rheinl. F. : 125 Rheinl. F. = 1391830 Lond. F. : x Lond. F.

x = 128,7, also: 125 Rheinl. F. = 128,7 Lond. F.

3) Wie viel machen 1000 Preußische Fuß in Pariser Fuß, wenn sich der Pariser zum Preußischen Fuß verhält = 14400 : 13913?

Antw.: 966,18 Pariser Fuß.

4) Wie viel betragen 360 ddc′ in dc′ ausgedrückt?

Auflösung: Da die Ruthe, als feststehendes Längengemäß, beim Duodezimalmaß in 12, und beim Dezimalmaß in 10 gleiche Theile getheilt ist, so sind 12 ddc′ = 10 dc′, und hiernach hat man folgenden Ansatz:

12 ddc′ : 360 ddc′ = 10 dc′ : x dc′

x = 300 dc′.

Anmerkung: Bei der Verwandlung des Duodezimalmaßes in Dezimalmaß hat man also nur nöthig, die gegebenen Duode-

zimal-Fuße mit 10 zu multipliciren, und was herauskommt durch 12 zu dividiren. Soll dagegen dc. M. in ddc. M. verwandelt werden, so multiplicire man das erstere mit 12, und dividire demnächst durch 10. Wenn dagegen 360 ddc. Zolle in dc. Zolle verwandelt werden sollen, so hat man den Ansatz: 144 ddc.'' : 360 ddc'' = 100 : x.

5) Wie viel betragen 83 dc.' in ddc.' ausgedrückt?
Antw.: 83 dc.' = $99\frac{2}{3}$ ddc.' = 8° 3' $7\frac{1}{2}$'' ddc.

6) Man soll 10° 8' 11'' 10''' ddc. M. in dc. M. verwandeln.
Auflös.: Man reducire die gegebene mehrfach benannte Zahl auf Ruthen, also
$$10° 8' 11'' 10''' = \left(10 + \frac{8}{12} + \frac{11}{12.12} + \frac{10}{12.12.12}\right)$$ Ruthen
$$= \left(10 + \frac{1152 + 132 + 10}{1728}\right) \text{ Ruthen} = 10\frac{647°}{864}.$$
Bei dieser Reduction hat man also jede niedere Ordnung, um sie auf ihre nächst höhere zu bringen, durch 12 dividirt. Verwandelt man nun den Bruch $\frac{647}{864}$ in einen Dezimalbruch, so wird
$$\frac{647°}{864} = 0{,}749° = 0° + \frac{7°}{10} + \frac{4°}{10.10} + \frac{9°}{10.10.10}$$
$= 0° + 7' + 4'' + 9'''$, und man hat durch diese Verwandlung den Bruchtheil der Ruthen wiederum in Einheiten der niederen Ordnung ausgedrückt, und durch das successive Anhängen von Nullen die in der Anmerkung zu No. 4. gegebene Regel gleichzeitig mit in Anwendung gebracht; folglich ist: 10° 8' 11'' 10''' ddc. M. = 10° 7' 4'' 9''' dc. M.

Anmerk.: Wollte man dagegen die Verwandlung des gegebenen ddc. M. durch Reduction der gegebenen Längen in Linien bewerkstelligen, so wäre 8' 11'' 10''' ddc = 1294''' ddc, und alsdann hätte man den Ansatz: 1728''' ddc : 1294''' ddc = 1000''' dc : x''' dc; x = 7' 4'' 8, 8''' dc. M. Die erstere Auflösung ist jedoch einfacher und deshalb der letztern vorzuziehen.

7) Wie viel machen 10° 7' 4'' 9''' dc. M. in ddc. M.?
Auflös.: Es ist
$$10° 7' 4'' 9''' \text{ dc} = 10° + \frac{7°}{10} + \frac{4°}{10.10} + \frac{9°}{10.10.10}.$$
Multiplicirt man 0,749° mit 12, so erhält man den Bruchtheil der Ruthen wiederum in Einheiten der niederen Ordnung, und in ddc. Maß ausgedrückt: also:
$$0{,}749°.12 = 8{,}988'$$
$$0{,}988'.12 = 11{,}856''$$
$$0{,}856''.12 = 10{,}272'''$$;
daher: 10° 7' 4'' 9''' dc. M. = 10° 8' 11'' 10''' ddc. M.

8) Wie viel betragen 50 □' ddc. M. in dc. M.?

Auflösung: Da die Quadratruthe, als feststehendes Flächengemäß, beim Duodezimalmaß in 144, und beim Dezimalmaß in 100 gleiche Theile, (Quadratfuße genannt) getheilt wird, so sind 144□′ ddc. M. = 100□′ dc. M., mithin ist:

144□′ ddcM.: 50□′ ddc. M. = 100□′ dc. M.: x□′ dc. M.

$$x = 34\frac{13}{18}\square' = 34\square' \; 72\square'' \; 22\square''' \text{ dc. M.}$$

Anmerkung: Die vorstehende Auflösung giebt folgende Regel an die Hand: „Multiplicirt man das in Quadratfußen gegebene Duodezimalmaß mit $\frac{1}{144}$, so wird daraus Dezimalmaß," und umgekehrt: „Multiplicirt man das in Dezimalfußen ausgedrückte Maß einer Fläche mit $\frac{144}{100}$, so wird daraus Duodezimalmaß."

9) Man soll 23□° 13□′ 8□″ ddc. M. in dc. M. verwandeln.

Auflösung: Man reducire die gegebene mehrfachbenannte Zahl auf Ruthen, und verwandele den Bruch der erhaltenen gemischten Zahl in einen Dezimalbruch, so geben die beiden ersten Stellen desselben die Fuße, die nächst folgenden die Zolle u. s. w. in dc. M. ausgedrückt, an.

Daher ist: $23\square^\circ \; 13\square' \; 8\square''$ ddc. M. $= \left(23 + \frac{13}{144} + \frac{8}{20736}\right)\square^\circ =$

$$23 + \frac{1872+8}{20736} = 23\frac{1880}{20736}\square^\circ = 23{,}090663\square^\circ = 23\square^\circ \; 9\square' \; 6\square'' \; 63\square''' \text{ dc. M.}$$

Man hat bei dieser Auflösung die in der Anmerkung zu No. 8. gegebene Regel gleichzeitig in Anwendung gebracht, und dadurch die Rechnung wesentlich abgekürzt.

10) Man soll 18□° 80□′ 6□″ dc. M. in ddc. M. ausdrücken.

Auflösung: $18\square^\circ \; 80\square' \; 6\square'' \text{ dc. M.} = \left(18 + \frac{80}{100} + \frac{6}{10000}\right)\square^\circ =$

$18{,}8006\square^\circ.$

$0{,}8006\square^\circ = 0{,}8006.144\square' = 115{,}2864\square'$

$0{,}2864\square' = 0{,}2864.144\square'' = 41{,}2416\square''$

$0{,}2416\square'' = 0{,}2416.144\square''' = 34{,}7904\square'''.$

Daher: $18\square^\circ \; 80\square' \; 6\square''$ dc. M. $= 18\square^\circ \; 115\square' \; 41\square'' \; 35\square'''$ ddc. M

11) Wie viel betragen $8\square^\circ \; 99\square' \; 12\square'''$ dc. M. in ddc. Maß?
Antw.: $8\square^\circ \; 142\square' \; 80\square'' \; 127{,}99\square'''$ ddc. M.

12) Wie viel machen $143\square' \; 93\square''$ ddc. M. in dc. M.?
Antw.: $99\square' \; 75\square'' \; 4\square'''$ dc. M.

13) $9^\circ \; 8' \; 5'' \; 3'''$ ddc. M. sollen in dc. Maß ausgedrückt werden?
Antw.: $9^\circ \; 7' \; 3\frac{1}{2}'''$ dc. M.

14) $3^\circ \; 8' \; 5'' \; 4'''$ dc. M. sollen in ddc. M. verwandelt werden?
Antw.: $3^\circ \; 10' \; 3''(2{,}976''')$ ddc. M.

15) $137\square' \; 89\square'' \; 122\square'''$ ddc. M. $= 95\square' \; 57\square'' \; 21{,}7\square'''$ dc. M.

16) $18\square^\circ \; 7\square'' \; 63\square'''$ dc. M. $= 18\square^\circ \; 15\square'' \; 118\square'''$ ddc. M.

17) Auf einem Situationsplane findet man die Entfernung zweier, 1250 Ruthen von einander entlegenen Punkte = 5, 78″, wie viel Zolle gehen in diesem Plane auf 100 Ruthen? Antw.: 0,4624″.

18) Ein Langtau ist 36′ lang und $1\frac{1}{4}$″ dick; nach welchen Abmessungen wird man ein solches Tau bei einem österreichischen Seiler in Bestellung geben müssen, wenn ein österreichischer Fuß = 12 österreichischen Zollen = 144 österreichischen Linien = 12,0859 preuß. Zollen ist? Antw.: 35′ 8″ 11,15‴ lang und 1″ 2,893‴ dick.

19) Eine in Frankreich kantonirende Laboratorien-Colonne soll 2400 6pfge Kugelkartuschen und 800—6pfge Karätschkartuschen anfertigen. Für 100 Stück der ersteren Art werden 48 und für 100 der zweiten Art 38 Ellen $\frac{3}{4}$ breiter Etamin gerechnet; wie lang und breit wird der zu beschaffende Etamin nach französischen Ellen sein müssen, wenn eine französische Elle = 1,7993 preuß. Ellen ist? Antw.: 809,2 franz. Ellen lang und 0,416 franz. Ellen breit.

20) Wie viel betragen 416 Danziger Scheffel in Berliner Maß, wenn sich der Danziger Scheffel zum Berliner wie 4904 : 5361 verhält? Antw.: 380 Scheffel $8\frac{3}{5}\frac{2}{3}\frac{5}{6}\frac{6}{1}$ Metzen.

21) Zum Satz für 100—7pfge Zünder werden $2\frac{1}{8}$ Pfd. Salpeter $1\frac{1}{8}$ Pfd. Schwefel und $1\frac{3}{8}$ Pfd. Mehlpulver gut gethan, wie viel von jedem Material ist zu 1296 Zündern erforderlich?
Antw.: 27 Pfd. 17 Lth. $1\frac{3}{2\,8}$ Quentchen Salpeter,
14 " 18 " $2\frac{6}{2\,8}$ " Schwefel,
17 " 26 " $\frac{2\,4}{2\,8}$ " Mehlpulver.

22) Ein Quartiermeister erhält den Auftrag, für 119 Pferde in Ermangelung jedes anderen Futters grünen Roggen auf einen Tag mähen zu lassen. Wie viel Garben wird er bringen müssen, wenn jede Garbe 50 Pfd. wiegt, 8 Pfd. Heu = 1 Metze Hafer, 200 Pfd. Stroh = 440 Pfd. grünen Roggen = 100 Pfd. Heu gerechnet werden, und die Ration aus $3\frac{3}{8}$ Metzen Hafer, 3 Pfd. Heu und 4 Pfd. Stroh besteht? Antw.: 366 Garben 26 Pfd.

23) Wenn der 2tägige Futterbedarf für eine Batterie $922\frac{1}{2}$ Metzen Hafer beträgt, und in Ermangelung des Hafers für die eine Hälfte des Bedarfs Roggen, und für die andere Gerste gefüttert werden soll, und nächstdem für 16 Metzen Hafer 9 Metzen Roggen oder 13 Metzen Gerste gerechnet werden, wie viel ist alsdann von jeder Getreideart anstatt des Haferbedarfs zu liefern?
Antw.: 16 Scheffel $3\frac{2\,9}{6\,4}$ Metzen Roggen,
23 " $6\frac{4\,9}{6\,4}$ " Gerste.

24) Wenn der Scheffel Roggen $2\frac{1}{8}$ Thlr. kostet, und für einen gewissen Preis 5 Pfd. Brot verkauft werden, wie viel erhält man, wenn der Scheffel Roggen $2\frac{1}{2}$ Thlr. kostet, für denselben Preis?
Antw.: $4\frac{1}{4}$ Pfd.

25) Ein Festungswerk wurde von 345 Arbeitern in 60 Tagen erbaut, wie viel Arbeiter würden nöthig gewesen sein, wenn 15 Tage länger gebaut worden wäre? Antw.: 276 Arbeiter.

26) 5000 Mann sind auf 12 Wochen mit Verpflegung versehen. Nach 3 Wochen gehen 1500 Mann davon ab; wie lange werden die Uebrigen mit den noch vorhandenen Lebensmitteln ausreichen?

Auflösung: 5000 Mann würden noch 9 Wochen damit auskommen, wie lange kommen 3500 Mann damit aus?

Antw.: 12 Wochen 6 Tage.

27) Ein Regiment muß täglich 5 Meilen machen, um in 24 Tagen in seiner Garnison einzutreffen. Wie viel Meilen muß es aber machen, um auf Grund eines eingegangenen Befehls 5 Tage früher daselbst einzutreffen, wenn es bereits seit 3 Tagen auf dem Marsche ist?

Auflösung: Nach 3 Tagen hat das Regiment noch 21 Tage zu marschiren und soll den übrigen Weg in 16 Tagen zurücklegen; nun muß aber bei kürzerer Zeit schneller marschirt werden, daher ist: $21 : 16 = x : 5$. Das Regiment muß also $6\frac{5}{16}$ Meilen täglich machen.

28) Ein Bogen Papier giebt 10 Hülsen zu Flintenpatronen, und man braucht zu einer gewissen Anzahl derselben 15 Rieß 9 Buch. Wie viel wird zu derselben Anzahl Hülsen erforderlich sein, wenn 16 aus einem Bogen geschnitten werden können?

Antw.: 9 Rieß 13 Buch 3 Bogen.

29) Zwei Dörfer, das eine A zu $27\frac{3}{4}$ Hufen, und das andere B zu $22\frac{1}{4}$ Hufen, erhalten zusammen 1050 Mann Einquartierung, welche nach Verhältniß der Hufen zu vertheilen sind. Wie viel Mann erhält jedes Dorf?

Auflösung: Setzt man die Einquartierung des Dorfes $A = x$, so erhält B $1050 - x$ Mann. Daher ist:

$1050 - x : x = 22\frac{1}{4} : 27\frac{3}{4}$.

A erhält 583 Mann und B 467 Mann.

30) In welcher Zeit wird ein Bote einen andern einholen, wenn der zweite 12 Tage später abgeht als der erste, und die Geschwindigkeit des zweiten sich zu der des ersten verhält, wie 8 : 3?

Auflösung: Nennt man die Zeit des ersten x Tage, so ist: $8 : 3 = x : x - 12$, und daraus x nach §. 142 bestimmt, giebt $7\frac{1}{5}$ Tage.

B. Die zusammengesetzte Regula de tri.

§. 158. Wenn zwei Größen A und B, in einer gewissen Beziehung, sich verhalten wie a zu b, und in einer an-

dern, wie $a' : b'$, so sagt man: sie stehen im zusammengesetzten Verhältniß und schreibt alsdann: $A : B = a . a' : b . b'$.

Ein zusammengesetztes Verhältniß ergiebt sich also durch Multiplication der homologen Glieder mehrerer von zwei Größen A und B abhängigen Verhältnisse.

Um die Richtigkeit der Proportion $A : B = a . a' : b . b'$ darzuthun, stelle man sich eine, den Größen A und B gleichartige, dritte Größe C dergestalt vor, daß sich die Werthe von A und C in einer Hinsicht wie $a : b$, und die Werthe von C und B in einer andern, wie $a' : b'$ verhalten, so daß man also hat:

$A : C = a : b$ und

$C : B = a' : b'$, beide Proportionen mit einander multiplicirt, giebt: $\overline{AC : BC = a . a' : b . b'}$, oder:

$A : B = a . a' : b . b'$.

§. 159. Dergleichen zusammengesetzte Verhältnisse sind uns im Leben vielfach gegeben. So z. B. verhalten sich zwei Zinsbeträge Z und Z' bei gleichen Zeiten und gleichem Zinsfuß, wie die Kapitalien A und B, welchen sie zugehören, und sodann aber auch bei gleichem Zinsfuß und gleichen Kapitalien, wie die Zeiten C und D.

Man hat also: $Z : Z' = \begin{cases} A : B \text{ die Kapitalien,} \\ C : D \text{ die Zeiten,} \end{cases}$ und nun soll sein:

$\overline{Z : Z' = A.C : B.D}$.

Beweis: Man denke sich einen dritten Zinsbetrag Z'', welchem mit Z' ein gleiches Kapital B und mit Z ein gleicher Zeitraum des Ausleihens C zugehört: also Z, Z', Z'' Zinsbeträge
A, B, B, Kapitalien
C, D, C, Zeiten,

so ist: $Z : Z'' = A : B$, weil die Zeiten gleich sind,
$Z'' : Z' = C : D$, weil die Kapitalien gleich sind,

folglich: $\overline{Z.Z'' : Z''.Z' = A.C : B.D}$ und das erste Verhältniß durch Z'' dividirt,

giebt: $Z : Z' = A.C : B.D$, was zu beweisen war.

Beispiele:

1) Man soll den Werth eines Stück Landes B bestimmen, wenn ein anderes Stück Land A, welches einen doppelten Ertrag als B abwirft, zu 1710 Thlr. verkauft worden ist, und man nächstdem

sich zieht, so hat man indirecte Verhältnisse, und der Ansatz ist alsdann:

$$A : A' = B' : B.$$

Z. B. Eine gewisse Arbeit wird in 20 Stunden von 4 Arbeitern gefertigt; wie viel Arbeiter sind erforderlich, wenn dieselbe Arbeit ein anderes Mal in 10 Stunden ausgeführt werden soll?

Da dieselbe Arbeit in der halben Zeit auszuführen ist, so sind offenbar doppelt so viele Arbeiter als das erste Mal erforderlich, und man hat daher ungerade Verhältnisse. Würde man nun schreiben:

20 Stunden : 10 Stunden = 4 Arbeiter : x Arbeiter,

so kämen 2 Arbeiter heraus, von welchen man aber nach den im gewöhnlichen Leben üblichen Annahmen nicht dasselbe verlangt, was 4 Arbeiter in doppelter Arbeitszeit leisten können. Kehrt man aber das zweite Verhältniß um, also

20 Stunden : 10 Stunden = x Arbeiter : 4 Arbeiter,

so erhält man x = 8 Arbeiter, welches Resultat den Annahmen des Lebens entspricht.

Auf gleiche Weise bildet man den Ansatz, wenn in einer Aufgabe die proportionirten Größen: Zinsfuß und Kapital bei ein und denselben Interessen, die Geschwindigkeit der Bewegung und die Zeit bei einem und demselben Wege, die Anzahl der Ellen und die Breite des Tuches zu einem und demselben Kleidungsstücke u. dgl. m. gegeben sind.

Setzt man die vorstehend für x gefundenen Werthe in ihre beziehlichen Proportionen, so werden dieselben in beiden Fällen richtig, und es giebt daher die Substitution des gefundenen Werthes in die gebildete Proportion keine Probe für den richtigen Ansatz ab, sondern nur ein Kennzeichen, daß die Rechnung für den jedesmaligen Ansatz richtig geführt worden ist.

Als practische Regel für die Bildung des Ansatzes bemerke man Folgendes:

„Man setze die beiden gegebenen gleichartigen Größen in das erste Verhältniß, und zwar die Fragezahl als 2tes Glied, und demnächst bei directen Verhältnissen die gesuchte Größe in das 4te, und bei indirecten in das 3te Glied der zu bildenden Proportion."

Beweis. 1) Hat man die proportionirten Größen:

A Thlr., A' Thlr., B Pfd. Waare und X Pfd. Waare, so ist, wenn A' als das nfache von A gedacht wird, auch X das nfache von B. Bildet man nun aus den gleichartigen Größen Verhältnisse (Quotienten), so ist:

Hierauf ziehe man einen Verticalstrich und setze links desselben die unbekannte Zahl x, und rechts daneben die ihr gleichartige. Nun schreibe man die Verhältnißglieder des bekannten Falls bei geraden Verhältnissen links, bei ungeraden rechts des Strichs, und die Glieder des unbekannten Falls den ersteren entsprechend daneben. Die Zahlen rechts und links des Strichs bilden zwei gleiche Producte, und man erhält den Werth für x, wenn man zu beiden Seiten des Strichs durch die gleichen Factoren hebt, und zuletzt beide Seiten der Gleichung durch den mit x verbundenen Factor dividirt.

x	40 5
8	6 3
2	3
2 10	12 6

$$x = 3.3.6 = 54.$$

3) 17 Mann haben binnen 40 Stunden eine gewisse Arbeit verrichtet. Es soll eine gleichartige Arbeit ausgeführt werden, welche $1\frac{1}{4}$mal so groß als die erstere ist, und wozu 20 Mann benutzt werden können; wie viel Zeit werden diese dazu brauchen?

Auflösung. 17 Mann 40 Stunden 1 Arbeit,

20 : x : $\frac{5}{4}$:

x	40 2
20	17
2 4 1	$\frac{5}{4}$ 5

$$2x = 5.17$$

$$x = 42\tfrac{1}{2} \text{ Stunde.}$$

Bemerkung. Da die Zahlen rechts und links des Verticalstrichs zwei gleiche Producte bilden, so kann man jeden im Ansatz vorkommenden Bruch dadurch wegschaffen, daß man zu beiden Seiten des Strichs mit dem Renner des wegzubringenden Bruchs multiplicirt. In dem Beispiele 3 wurde mit 4 multiplicirt, und man erhielt rechts des Strichs anstatt $\frac{5}{4}$ den Factor 5, und links den Factor 4. Außerdem wurde noch gehoben 20 gegen 40: giebt 2, und 2 gegen 4: giebt 2.

4) Man erhält 4 Pfd. Brot für 3 Sgr., wenn der Scheffel Roggen 2 Thlr. kostet; bei welchem Kornpreise erhält man 6 Pfd. für 5 Sgr.? — Antw.: 2 Thlr. 6 Sgr. 8 Pf.

5) Ein Graben von 20′ Länge, 6′ Breite und $4\frac{1}{2}$′ Tiefe wird von 8 Mann in 3 Tagen, wenn sie täglich 6 Stunden arbeiten, aus-

gehoben; wie viel Mann wird man brauchen, um in 6 Tagen, bei 8 Stunden Arbeitszeit, einen Graben von 30′ Länge, 8′ Breite und 6′ Tiefe in einem Boden auszuheben, der ¼ mehr Arbeit erfordert? Antw.: 10$\frac{10}{11}$ Mann, wofür man, da es keinen $\frac{10}{11}$ Menſchen giebt, 11 Mann annehmen wird.

§. 161. Noch andere Beiſpiele der zuſammengeſetzten Regula de tri.

1) Zu einer Maurerarbeit ſind 25000 Mauerſteine, à 12″ lang, 6″ breit und 3″ dick, veranſchlagt; wie viel Steine wird man zu dieſer Arbeit brauchen, wenn dieſelben nur 10″ lang, 5″ breit und 2½″ dick ſind? Antw.; 43200 Stück.

2) 8 Arbeiter fertigen in 5 Stunden 10—16fußige Faſchinen; wie viel Tage, den Tag zu 10 Stunden gerechnet, müſſen 72 Arbeiter arbeiten, um 2000 Faſchinen à 12′ Länge zu fertigen? Antw.: 8¼ Tage.

3) Es iſt für 120 Pferde, die Ration à 3½ Metzen Hafer gerechnet, auf 14 Tage Futter vorhanden; wie viel wird die tägliche Ration betragen, wenn noch 30 Pferde hinzukommen, und der Futtervorrath auf 12 Tage reichen ſoll? Antw.: 3½ Metze.

4) 300 Arbeiter erhalten 1800 Thlr. Arbeitslohn, die ſie in 12 Tagen, bei 15ſtündiger, täglicher Arbeitszeit, verdient haben. Wenn nun 250 Arbeiter in 30 Tagen 1500 Thlr. Arbeitslohn bekommen, wie viel Stunden haben ſie täglich gearbeitet? Antw.: 6 Stunden.

5) Um eine gewiſſe Anzahl Palliſaden fortzuſchaffen, bedarf man während 5 Tagen täglich 30 4ſpännige Wagen, deren jeder 3 Fuhren täglich leiſten kann. Wie viel 2ſpännige Wagen, die nur ⅔ ſo viel als die erſtern laden, aber täglich 5 Fuhren leiſten, ſind erforderlich, um den Transport in einem Tage beendigen zu können?

Auflöſung:

$$30 : x \begin{cases} \text{in Hinſicht der Zeit} & = 1:5 \text{ (indirect)} \\ \text{in Hinſicht der tägl. Fuhren} & = 5:3 \text{ (indirect)} \\ \text{in Hinſicht der Ladung} & = 2:3 \text{ (indirect)}; \end{cases}$$

$$\text{alſo } x = \frac{30.9}{2} = 15.9 = 135 \text{ Wagen.}$$

6) Eine Bruſtwehr, 120° lang, 7′ hoch, 16′ dick, wird von 500 Arbeitern in 15 Stunden aufgeführt; wie ſtark wird dieſelbe bei 6½′ Höhe und 160° Länge werden können, wenn 800 Mann 12 Stunden daran arbeiten? Antw.: 16$\frac{17}{13}$′.

7) Eine Mauer, 50° lang, 8′ hoch, 6′ ſtark, iſt von 120 Arbeitern in 60 Tagen, bei 15ſtündiger Arbeitszeit, aufgeführt worden; wie viel Stunden müſſen 150 Arbeiter täglich arbeiten, um eine Mauer, 80° lang, 12′ hoch und 10′ dick in 80 Tagen zu fertigen? Antw.: 16 Stunden.

8) Um eine Bruſtwehr von 120′ Länge mit 2′ dicken und 4′ hohen

Schanzkörben zu bekleiden, gebraucht man incl. Vorrath 66 Stück; wie viel Sandsäcke sind hiernach zu 215′ Brustwehrlänge erforderlich, wenn jeder Sandsack 8″ im Durchmesser enthält, und wie viel Faschinen zu 12′ Länge, und 6″ Stärke? Antw.: 2128½ Sandsäcke oder 157½ Faschinen.

9) Um einen Graben auszuheben, welcher 50° lang, 5½′ breit und 6′ tief ist, brauchen 40 Mann 12 Tage. Es soll ein anderer Graben von 9′ Breite und 7′ Tiefe in einem weit festeren Erdreiche ausgehoben werden, so daß man hier, um 2½ Kubikfuß Erde auszuheben, eben so viel Zeit gebraucht, als bei dem ersteren Graben zu 4½ Kubikfuß erforderlich war. Welche Länge wird dieser Graben nach 8 Tagen erreicht haben, wenn die tägliche Arbeitszeit dieselbe ist, wie bei der Aushebung des ersten Grabens, aber nur 20 Arbeiter gestellt werden können?
Antw.: 4° 4′ $8\frac{8}{11}$″.

10) Zu einer 150′ langen, 6′ hohen Kugelwand hat man 100 Stück 12′ lange und 1½′ breite Dielen gebraucht; wie viel Stück 15′ lange und 1½′ breite Dielen wird man zu einer 96′ langen und 9′ hohen Bretterwand brauchen? Antw.: 64 Stück.

11) Auf 6 Faschinenbänken können in 4 Stunden 48 Stück Faschinen à 16′ Länge gebunden werden; wie viel, à 12′, sind in 24 Stunden auf 50 Bänken zu binden? Ant.: 3200 Stück.

12) Wenn näherungsweise der hohle Raum der verschiedenen Bomben sich verhält, wie die Kuben ihrer äußeren Durchmesser, und bekannt ist, daß eine preußische 10pfündige Bombe 6,36″ Durchmesser hat, und daß ferner ein Brandbombensatz = 17 Pfd., zum Füllen von 5—10 pfünd. Bomben hinreicht, wie viel Satz wird man brauchen, um 275—8zöllige französische Bomben zu füllen, deren Durchmesser nach preußischem Maß 8,408″ beträgt?

Auflösung: 5 Brandbomben, $6{,}36^3$, 1 Satz
275 „ $8{,}408^3$, x „

$$\begin{array}{r|l} x & 1 \\ 5 & 275 \\ 6{,}36.\ 6{,}36.\ 6{,}36. & 8{,}408.\ 8{,}408.\ 8{,}408 \end{array}$$

x = 127,08 Brandbombensatz = 2160 Pfd. 11 Lth.

13) Ein Kanal, welcher 2000′ lang, 12′ tief und 20′ breit ist, wurde durch 150 Arbeiter, die täglich 10 Stunden arbeiteten, in einem Jahre und 235 Tagen fertig. Ein anderer Kanal von 1800′ Länge, 12′ Tiefe und 24′ Breite soll ausgeführt werden, und man stellt dazu 200 Arbeiter an, die täglich 9 Stunden arbeiten. Im Vergleich der Arbeit bei dem 1sten Kanal kann hierbei jeder Arbeiter im Durchschnitt täglich um $\frac{9}{10}$ fortschreiten. In wie viel Zeit wird der 2te Kanal fertig werden? Ant.: In 600 Tagen.

14) Eine Fußbatterie ist auf 8 Tage mit Hafer für 98 Pferde, die Ration à $3\frac{3}{4}$ Metzen, versehen. Nach Verlauf zweier Tage erhält diese Batterie 52 Pferde Ersatz, und die Umstände machen es nöthig, daß sie jetzt noch 5 Tage mit ihrem Hafervorrathe auskomme. Wie groß wird die tägliche Ration jetzt angenommen werden müssen?

Antw.: Zu 2,94 Metzen, oder ungefähr auf 5 Pferde $14\frac{1}{2}$ Metzen, während früher 5 Pferde $18\frac{3}{4}$ Metzen erhielten.

Fünfzehntes Kapitel.

Von der einfachen Zinsrechnung, Rabattrechnung und Kettenregel.

A. Die einfache Zinsrechnung.

§. 162. Die Zinsrechnung umfaßt alle diejenigen Aufgaben, welche aus den Beziehungen zwischen Kapital, Zinsen, Zeit und Zinsfuß hervorgehen. Das Kapital besteht in Geld oder andern werthhabenden Gegenständen. Die Zinsen (Interessen) sind die Entschädigung oder der Gewinn, welchen das Kapital seinem Besitzer abwirft. Sie werden vom Hundert berechnet und bestehen aus p Einheiten, welche jedes Hundert Einheiten eines Kapitals in einer gewissen Zeit (bei Geld gewöhnlich in einem Jahre), seinem Besitzer als Gewinn bringt. Dieser Gewinn — auch „Procente" genannt — ist nach einem gesetzlichen Zinsfuße festgestellt, und darf 5 Thlr. pro 100 Thlr. nicht überschreiten. Man sagt alsdann: das Kapital ist zu 5 Procent — „5 %" — ausgeliehen. Werden die Zinsen nach Ablauf der Zeit, in welcher sie fällig sind, gleich wieder zum verzinsbaren Kapital geschlagen, so daß dieses jedesmal um die fälligen Zinsen wächst und, auf diese Art vergrößert, wieder in der nächsten Zinsperiode verzinst wird, so gehören die auf dieses Verhältniß Bezug habenden Aufgaben in die Zinseszinsrechnung. Werden dagegen die Zinsen nach Ablauf eines

Jahres nicht zum Kapital geschlagen, so daß also dieselben nicht wieder verzinsbar sind, so nennt man sie einfache Zinsen. Nur von diesen Zinsen soll hier die Rede sein.

Bei den Aufgaben der Zinsrechnung sind von den vier Größen: Kapital, Zinsen (Interessen), Zeit und Zinsfuß, stets 3 gegeben, so daß hier überhaupt 4 verschiedene Aufgaben stattfinden können. Außerdem kommt noch bei allen derartigen Aufgaben das feststehende Verhältniß: 100 : p, d. h.: ein Kapital von 100 Thlr. giebt in einem Jahre p Thlr. Zinsen, in Betracht.

Die Auflösung der einfachen Zinsaufgaben kann sowohl nach dem Ansatze für die einfache, als auch für die zusammengesetzte Regula de tri geschehen.

§. 163. 1te Aufgabe. Wie viel Interessen giebt ein Kapital A zu p Procent in n Jahren?

Auflösung: 100 Thlr. geben in einem Jahre p Thlr. Zinsen, also in n Jahren n.p Zinsen, daher auch:

$$100 : A = np : x$$

$$x = \frac{A.n.p}{100};$$

oder, nach dem Ansatze für die zusammengesetzte Regula de tri:

A Kapital x Procent n Jahre
100 Thlr. p Procent 1 Jahr

daher $p : x$ { $100 : A$; $1 : n$

$$p : x = 100 : An$$

$$x = \frac{A.n.p}{100}.$$

Beispiele:

1) Wie viel geben 1850 Thlr. zu 4 Procent in 12 Jahren?

$$100 : 1850 = 12.4 : x$$

$$x = \frac{1850.12.4}{100} = \frac{185.12.2}{5} = 37.24 = 888 \text{ Thlr.}$$

2) 10000 Thlr. stehen zu 4 Procent, wie viel betragen Kapital und Zinsen in $3\frac{1}{2}$ Jahren?
Antw.: 11400 Thlr.

2te Aufgabe. Wie groß muß ein Kapital sein, welches, zu p Procent ausgeliehen, in n Jahren a Zinsen giebt?

Auflösung: Ein Kapital von 100 Thlr. giebt in n Jahren np Zinsen, daher verhält sich:

$$np : a = 100 : x$$
$$x = \frac{a.100}{np};$$

oder nach dem Ansatze der zusammengesetzten Regula de tri:

x Kapital a Zinsen n Jahre
100 Thlr. p Proc. 1 =

$$x : 100 = \begin{cases} a : p \\ 1 : n \end{cases}$$
$$x : 100 = a : np$$
$$x = \frac{a.100}{np}.$$

Beispiel: Wie groß ist das Kapital, welches, zu 4 Procent ausgeliehen, in 6 Jahren 1000 Thlr. Interessen giebt?

$$6.4 : 1000 = 100 : x$$
$$x = 4166 \text{ Thlr. } 20 \text{ Sgr.}$$

3te Aufgabe. Wie viel Jahre muß ein Kapital A zu p Proc. stehen, wenn dasselbe a Zinsen bringen soll?

Auflösung: Ein Capital von 100 giebt in x Jahren xp Zinsen, also entsteht die Proportion:

$$A : 100 = a : xp$$
$$xp = \frac{a.100}{A}$$
$$x = \frac{a.100}{Ap};$$

oder nach der zusammengesetzten Regeldetri:

$$x : 1 = \begin{cases} 100 : A \text{ (indirect)} \\ a : p \end{cases}$$
$$x = \frac{a.100}{A.p}$$

Beispiel: Wie viel Jahre müssen 1000 Thlr. zu 4 Proc. auf Zinsen stehen, um 1000 Thlr. Zinsen zu bringen?

$$1000 : 100 = 1000 : x.4$$
$$x = \frac{1000.100}{4.1000} = 25 \text{ Jahre.}$$

4te Aufgabe. Zu welchem Zinsfuße muß ein Kapital A ausgeliehen werden, damit dasselbe in n Jahren a Zinsen trage?

Auflösung: In dieser Aufgabe wird gefragt, wie viel ein Kapital von 100 Thlr. in einem Jahre Zinsen trage; also x Zinsen. Nun soll aber das Kapital A in n Jahren a Zinsen geben, mithin muß es in einem Jahre $\frac{a}{n}$ Zinsen tragen, und man hat daher den Ansatz: $A : 100 = \frac{a}{n} : x$

$$x = \frac{100.a}{A.n};$$

oder nach der zusammengesetzten Regeldetri:

$$a : x = \begin{cases} A : 100 \\ n : 1 \end{cases}$$

$$a : x = An : 100$$

$$x = \frac{a.100}{A.n}.$$

Beispiel:

Zu welchem Zinsfuß müssen 1000 Thlr. ausgeliehen werden, wenn sie in 20 Jahren 1000 Thlr. Interessen einbringen sollen?

$$1000 : 100 = \frac{1000}{20} : x$$

$$x = 5 \text{ Proc.}$$

§. 164. Kommen in einer Aufgabe der Zinsrechnung mehr als 5 Größen vor, so muß der Ansatz stets nach der zusammengesetzten Regeldetri geschehen.

Beispiele:

1) Wie viel betragen die Zinsen von 3800 Thlr. in 3 Jahren, wenn bei denselben Procenten 2800 Thlr. in 7 Jahren 1280 Thlr. Interessen geben?

Auflösung: Setzt man die gesuchten Zinsen = x, so ist:

$$x : 1280 = \begin{cases} 3800 : 2800 \\ 3 : 7 \end{cases}$$

$$x : 1280 = 3.3800 : 7.2800$$

$$x = 744 \text{ Thlr. } 14 \text{ Sgr. } 8\tfrac{4}{7} \text{ Pfennige.}$$

2) Wie groß ist ein Kapital, welches in 3 Jahren zu 4 Proc. eben so viel Zinsen trägt, als ein Kapital von 2000 Thlr. zu 5 Proc. in 10 Jahren?

Auflösung: $x : 2000 = \begin{cases} 10 : 3 \text{ (indirect)} \\ 5 : 4 \end{cases}$

$$x : 2000 = 5.10 : 3.4$$

$$x = 8333\tfrac{1}{3} \text{ Thlr.}$$

3) Wie lange müssen 6000 Thlr. zu 4 Procent stehen, um so viel Interessen zu tragen, als 5000 Thlr. zu 5 Procent in 5 Jahren?

Auflösung: 5000 Thlr. 5 Procent 60 Monat

6000 Thlr. 4 Procent x =

x	60
6000	5000
4	5

$$x = 5 \text{ Jahre } 2\tfrac{1}{2} \text{ Monat.}$$

§. 165. Ist bei der Zinsrechnung die Zeit in Monaten und Tagen gegeben, so wird der Monat zu 30 Tagen und das Jahr zu 365 Tagen gerechnet; z. B.:

Wie viel hat Jemand in jeder Woche zu verzehren, der von den Zinsen seiner Kapitalien lebt, die 14600 Thlr. betragen, und zu 5 Procent ausstehen?

Auflösung: In dieser Aufgabe wird gefragt: wie viel Zinsen geben 14600 Thlr. in 7 Tagen, wenn 100 Thlr. in 365 Tagen 5 Thlr. Zinsen tragen? Antw.: 14 Thlr.

§. 166. Uebungsbeispiele.

1) Wenn von 1575-6pfdgen Kugeln 392 als untauglich verworfen werden, wie viel Procent sind unbrauchbar?

Auflösung: In dieser Aufgabe ist die Frage gestellt, wie viel von 100 Kugeln unbrauchbar sind; man hat also den Ansatz: $1575 : 392 = 100 : x$

$$x = 24{,}88 \text{ Procent.}$$

2) Wenn man zu 79 Pfd. Mehlpulver $83\frac{1}{2}$ Pfd. Kornpulver verbraucht hat, wie viel Procent Verlust ist alsdann gewesen?

Auflösung: $83\frac{1}{2} : (83\frac{1}{2} - 79) = 100 : x$

$$x = 5{,}389 \text{ Procent.}$$

3) Wie viel Zinsen trägt ein Kapital von 4500 Thlr. zu 4 Procent in 15 Monaten? Antw.: 225 Thlr.

4) Wie lange muß ein Kapital von 5500 Thlr. zu 3 Procent stehen, damit es 110 Thlr. Interessen trägt? Antw.: 8 Monat.

5) Wie groß ist das Kapital, das zu $3\frac{3}{4}$ Procent ausgeliehen, in $2\frac{1}{2}$ Jahren 112 Thlr. 15 Sgr. Zinsen trägt? Antw.: 1200 Thlr.

6) Zu wie viel Procent hat man sein Geld ausgeliehen, wenn 1700 Thlr. in 5 Monat 17 Thlr. 21 Sgr. 3 Pf. einbringen? Antw.: Zu $2\frac{1}{2}$ Procent.

7) Wenn ein Wucherer sich wöchentlich auf den ausgeliehenen Thaler 1 Sgr. Interessen geben läßt, zu wie viel Procent hat er sein Geld angelegt? Antw.: Zu $173\frac{1}{7}$ Procent.

8) Am 1sten Januar 1830 lieh Jemand ein Kapital von 5600 Thlr. zu 4 Procent aus, und nahm nach einiger Zeit 420 Thlr. Zinsen dafür ein; bis zu welchem Tage waren die Zinsen damit bezahlt?

Auflösung; Bekannter Fall: 100 Thlr. 12 Mon. 4 Thlr. Zinsen.
Unbekannter Fall: 5600 Thlr. x = 420 Thlr.

$$12 : x = \begin{cases} 5600 : 100 \\ 4 : 420 \end{cases}$$

$$x = 22\frac{1}{2} \text{ Monat.}$$

420 Thlr. sind also die Zinsen für $22\frac{1}{2}$ Monat, und dieselben sind daher bis zum 16ten November 1831 bezahlt.

9) Ein Kapital von 1000 Thlr. ist in 8 Jahren auf 1368 Thlr. 17 Sgr. 1 Pf. angewachsen, zu wie viel Procenten ist dieses Kapital benutzt worden? Antw.: $4\frac{3}{4}$ Proc. od. genau $4\frac{4}{7}\frac{3}{7}\frac{7}{10}$ Proc.

10) Eine Fabrik wirft wegen verschiedener Unglücksfälle in diesem Jahre einen um 2 Proc. verhältnißmäßig geringeren Ertrag ab, hat aber $\frac{1}{4}$ mehr an Arbeit geliefert, als im vergangenen Jahre. Wenn sie nun im vergangenen Jahre 3860 Thlr. einbrachte, wie

viel wird sie in diesem Jahre abwerfen? Antw.: 5043 Thlr. 22 Sgr.

11) Es hat Jemand, der von seinen Kapitalien lebt, die zu $4\frac{1}{4}$ Proc. ausstehen, wöchentlich 6 Thlr. 5 Sgr. zu verzehren; wie hoch belaufen sich seine Capitalien? Antw.: 7565 Thlr: 24 Sgr. $9\frac{1}{2}$ Pf.

12) In wie vielen Jahren werden die Interessen, bei einen Zinsfuße von 6 Procent dem Kapital gleich sein?

Auflösung: 100 Thlr. 6 Thlr. 1 Jahr.
A Thlr. Capital A Thlr. Proc. x Jahr.
$x = 16\frac{2}{3}$ Jahre.

13) Zu wie viel Procent muß ein Kapital ausstehen, wenn die Interessen in 12 Jahren dem Kapital gleich sein sollen? Antw: Zu $8\frac{1}{3}$ Procent.

B. Die Rabattrechnung.

§. 167. Im Handel ist es häufig gebräuchlich, sich von dem Preise der Waare einen in Procenten ausgedrückten Abzug gefallen zu lassen. So z. B. bezahlt man für 100 Thlr. Waare nur (100—p) Thlr. baares Geld. Man nennt diesen Erlaß (p) an der eigentlichen Kaufsumme den Rabbat, und die Rechnung, durch welche derselbe gefunden wird, die Rabattrechnung.

Zuweilen leistet man den Rabatt auch dergestalt, daß für 100 Thlr. baares Geld (100+p) Thlr. an Waare geliefert wird. Man nennt alsdann diesen Rabatt — „den Rabatt auf Hundert" — und zum Unterschiede den ersteren — „den Rabatt in oder von Hundert". —

I. Rabatt in Hundert.

Beispiele:

1) Wie viel muß man baar für eine gewisse Quantität Waare gegen p Procent Rabatt in Hundert zahlen, wenn dieselbe laut Preis-Courant k Thlr. kostet?

Auflösung. Nach der Erklärung kosten 100 Thlr. Waare (100—p) Thlr. baar; daher muß auch sein:

$$100 : 100-p = k : x$$

$$x = \frac{k.(100-p)}{100}.$$

2) Jemand kauft für 100 Thlr. 25 Sgr. Bücher gegen 12 Procent Rabatt in Hundert, wie viel ist an die Buchhandlung baar zu zahlen?

Auflösung. 100 Thlr. : (100 — 12) Thlr. = $100\frac{5}{6}$ Thlr. : x Thlr.
100 : 88 = $\frac{605}{6}$: x
x = 88 Thlr. 22 Sgr.

3) Wie viel Rabatt in Hundert hat ein Lieferant gegeben, wenn er pro Ctr., der nach dem Preis-Courant 67 Thlr. kostet, nur 61 Thlr. 29 Sgr. 3 Pf. anrechnet?
Auflösung: 100 : 100 — x = 67 Thlr. : 61 Thlr. 29 Sgr. 3 Pf.
x = $7\frac{1}{2}$ Procent Rabatt in Hundert.

4) Wenn für 5 Centner 20 Pfd. Kornpulver 4 Ctr. 84 Pfd. $12\frac{6}{5}$ Lth. Mehlpulver zurückgeliefert werden, wie viel Procent beträgt der Verlust? Antw.: 8 Procent.

II. Rabatt auf Hundert.

1) Wie viel beträgt die baare Zahlung, wenn eine Waare im Werthe von k Thlr. zu p Procent Rabatt auf Hundert verkauft wird?
Auflösung: Nach der Erklärung bezahlt man bei Rabatt auf Hundert für (100 + p) Thlr. Waare, 100 Thlr. baar. Hiernach gilt die Proportion: 100 + p : 100 = k : x

$$x = \frac{k.100}{100+p}.$$

2) A kauft für 16200 Thlr. Waare mit 10 Procent Rabatt auf Hundert, wie viel muß er baar bezahlen?
Auflösung: 110 : 100 = 16200 Thlr. : x Thlr.
x = 14727 Thlr. 8 Sgr. $2\frac{2}{11}$ Pf.

3) Wie viel Schlagröhren gehören zu 2360 Schuß, wenn dabei 10 Procent gut gethan werden?
Auflösung: Man hat hier Rabatt auf Hundert zu geben, denn die Aufgabe besagt, daß zu je 100 Schuß 110 Schlagröhren verabreicht werden sollen. Man hat daher:
100 : 110 = 2360 : x
x = 2596 Schlagröhren.

§. 168. Uebungsbeispiele für die Rabattrechnung.

1) Es hat Jemand eine Rechnung von 75 Thlr. zu bezahlen, und soll davon $3\frac{1}{4}$ Procent Rabatt in Hundert abziehen; wie viel hat er zu entrichten?
100 : $96\frac{1}{4}$ = 75 : x
x = 72 Thlr. 5 Sgr. $7\frac{1}{2}$ Pf.

2) Jemand kauft für 270 Thlr. 15 Sgr. Bücher, bei $33\frac{1}{3}$ Procent Rabatt in Hundert; welches ist der eigentliche Werth der Bücher?
Auflösung: Der Käufer erhält für (100 — $33\frac{1}{3}$) Thlr. 100 Thlr. an Büchern, daher ist: $66\frac{2}{3}$: 100 = $270\frac{1}{2}$: x
x = 405 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf.

3) In einem Laboratorium sind 5 Ctr. 20 Pfd. Kornpulver zu Mehl-

pulver zu reiben. Bei dieser Arbeit werden 8 Procent Verlust in Hundert gut gethan; wie viel Mehlpulver ist abzuliefern? Antw.: 4 Ctr. 84 Pfd. $12\frac{4}{5}$ Lth.

4) Der Ctr. roher Salpeter kostet 20 Thlr., was kostet der Ctr. des 3mal geläuterten, wenn bei jeder Läuterung 5 Procent verloren gehen?

Auflösung: Man hat hier ungerade Verhältnisse, denn je reiner der Salpeter desto weniger erhält man, und um so theurer wird derselbe; also ist:

1) $100 : 100 - 5 = x : 20$

$$x = \frac{20}{0{,}95};$$ Preis nach der 1sten Läuterung.

2) $1 : 0{,}95 = x' : \frac{20}{0{,}95}$

$$x' = \frac{20}{0{,}95.0{,}95};$$ Preis nach der 2ten Läuterung.

3) $1 : 0{,}95 = x'' : \frac{20}{0{,}95.0{,}95}$

$$x'' = \frac{20}{0{,}95^3} = \frac{20}{0{,}857375} = 23 \text{ Thlr. } 9 \text{ Sgr. } 9{,}6 \text{ Pf.}$$

und dies ist der Preis eines Ctrs. des 3mal geläuterten Salpeters.

5) Der Ctr. roher Salpeter kostet 21 Thlr. 15 Sgr., was kostet der Ctr. des 3mal geläuterten, wenn bei der 1sten Läuterung 8 Procent, bei der 2ten 7 Procent und bei der 3ten 6 Procent verloren gehen? Antw.: 26 Thlr. 21 Sgr. $11\frac{3}{4}$ Pf.; genau $\frac{2}{3}\frac{6}{5}\frac{1}{1}\frac{2}{1}\frac{7}{1}$ Pf.

6) Beim Läutern des Pechs rechnet man 18 Procent Abgang in Hundert, man will 100 Pfd. geläutertes Pech haben, wie viel ungeläutertes gebraucht man dazu? Antw.: 121 Pfd. $30\frac{1}{4}\frac{8}{1}$ Lth.

7) Ein Fabrikant verkauft eine Waare zu 10 Procent Rabatt in Hundert, ein andrer dagegen dieselbe Waare zu 10 Procent Rab. auf Hundert; bei welchem Fabrikanten kauft man am besten, und wie viel beträgt der Unterschied in den Preisen, wenn für 1000 Thlr. Waare gekauft wird?

Auflösung: Der baare Kaufpreis beim 1sten Fabrikanten ergiebt sich aus der Proportion:

$100 : 90 = 1000 : x$

$x = 900$ Thlr.; beim 2ten aus d. Proportion:

$110 : 100 = 1000 : x$

$x = 909\frac{1}{11}$ Thlr.

Man kauft daher bei dem ersteren um 9 Thlr. 2 Sgr. $8\frac{8}{11}$ Pf. billiger, und dies giebt, in Procenten ausgedrückt:

$900 : 9\frac{1}{11} = 100 : x$

$$x = \frac{9\frac{1}{11}}{9} = 1\frac{1}{99} = 1{,}0101 \text{ Procent.}$$

8) **Wenn** ein Gießer bei Kupfer 3 Procent und bei Zinn 8 Procent Abbrand auf 100 rechnet, und zu einem Gusse 17 Ctr. 65 Pfd. Metall gebraucht, welches aus 8 Theilen Kupfer und 1 Theil Zinn besteht, wie viel wird er von jedem Metall in den Ofen bringen müssen?

Antw.: 16 Ctr. 11,6 Pfd. Kupfer und
2 Ctr. 12,2 Pfd. Zinn
Im Ganzen: 18 Ctr. 23,8 Pfd. Metall.

9) **Wenn** zu 100000 Flintenpatronen à $\frac{2}{3}$ Lth. Füllung 23 Rieß Patronenpapier gut gethan werden, wie viel Procent Rabatt in Hundert ist dabei gerechnet worden, wenn 10 Patronen auf den Bogen kommen?

Auflösung: Zu 100000 Patronen werden 10000 Bogen wirklich verbraucht; es verhält sich daher:

$$23.20.24 \text{ Bogen} : 10000 \text{ Bogen} = 100 : 100 - x$$
$$x = 9\tfrac{1}{23} \text{ Procent Rabatt.}$$

C. Die Kettenregel.

§. 169. Wenn in einer Aufgabe das Verhältniß zweier Größen, von denen die eine gesucht werden soll, nicht unmittelbar gegeben ist, sondern erst durch mehrere, gleichsam kettenförmig zusammenhängende, Zwischenverhältnisse gefunden werden muß, so hat man eine Aufgabe der Kettenregel. Die Auflösung aller derartigen Aufgaben kann zunächst durch eine wiederholte Anwendung der einfachen Regula de tri geschehen.

Beispiele:

1) Ein Eimer Wein kostet 84 Gulden (Fl.), was kosten 8 Eimer in Thalern ausgedrückt, wenn der Gulden sich zum Thaler verhält wie 2 : 3?

Auflösung: Nach der einfachen Regula de tri wird man, da 3 Fl. gleich 2 Thlr. sind, schließen:

$$3 \text{ Fl.} : 84 \text{ Fl.} = 2 \text{ Thlr.} : x \text{ Thlr.}$$
$$x = \frac{2.84}{3} \text{ Thlr., und sodann:}$$
$$1 \text{ Eimer} : 8 \text{ Eimer} = \frac{2.84}{3} \text{ Thlr.} : x \text{ Thlr.}$$
$$x = \frac{2.8.84}{1.3} = 488 \text{ Thlr.}$$

Der gesuchte Preis ist also durch den Quotienten zweier

Producte ausgedrückt, und diese Producte kann man [illegible] bilden, wenn man die Aufgabe, wie folgt, liest: „Wie [illegible] Thaler kosten 8 Eimer, wenn 1 Eimer 84 Fl. kostet, und [illegible] Fl. 2 Thlr. ausmachen." Alsdann schreibt man folglich folgenden Kettenansatz hin:

x Thlr. = 8 Eimer
1 Eimer = 84 Fl.
3 Fl. = 2 Thlr.

Macht man nun die Producte sämmtlicher Ausdrücke rechts und links der Gleichheitszeichen, so erhält man dasselbe, wie bei der ersteren Auflösung, nämlich:

$$1 \cdot 3 \cdot x = 2 \cdot 8 \cdot 84$$

$$x = \frac{2 \cdot 8 \cdot 84}{3} = 448 \text{ Thlr.}$$

2) Was kosten 8 Eimer Wein in Preuß. Courant, wenn ein Eimer 84 Fl. kostet, 9 Fl. aber in Conventionsgeld $5\frac{55}{69}$ Thlr. und 100 Thlr. Conventionsmünze $103\frac{1}{2}$ Thlr. Preuß. Courant ausmachen?

Auflösung: a) Nach der einfachen Regula de tri ist:

1) 1 Eimer : 8 Eimer = 84 Fl. : y Fl.
y = 84.8 Fl.

2) 9 Fl. : 84.8 Fl. = $5\frac{55}{69}$ Thlr. Conv. : z Thlr. Conv.

$$z = \frac{8.84.5\frac{55}{69}}{9} = \frac{8.84.400}{9.69} \text{ Thlr. Conv.}$$

3) 100 Thlr. Conv. : $\frac{8.84.400}{9.69}$ Thlr. Conv. = $103\frac{1}{2}$ Thlr. Pr. Cour. : x Thlr. Pr. Cour.

$$x = \frac{8.84.400.103\frac{1}{2}}{9.69.100} = \frac{8.84.400.207}{2.9.69.100} = 448 \text{ Thlr. Pr. Cour.}$$

b) Nach der Kettenregel ergiebt sich, wenn man in Stelle der Gleichheitszeichen einen Verticalstrich zieht, folgender Ansatz:

x Thlr. Pr. Cour.	8 Eimer
1 Eimer	84 Fl.
9 Fl.	$5\frac{55}{69}$ Thlr. Conv.
100 Thlr. Conv.	$103\frac{1}{2}$ Thlr. Pr. Cour.
9 . 100 . x	8 . 84 . $5\frac{55}{69}$. $103\frac{1}{2}$

$$x = \frac{8.84.400.207}{2.9.69.100} = 448 \text{ Thlr. Pr. Cour.}$$

l: „Bei der Bildung des Kettenansatzes setzt man links von einem Verticalstriche die gesuchte unbekannte Zahl x und rechts daneben die Fragezahl; sodann setzt man wiederum links, unter x, die mit der Fragezahl gleichnamige Zahl und rechts daneben diejenige Zahl, welche der Angabe nach mit ihr gleichen Werth hat. Auf diese Art setzt man die Kette fort, bis zuletzt rechts eine Zahl erscheint, die mit der gesuchten unbekannten Zahl x gleichnamig ist."

Ist dieser Ansatz gebildet, so hebt man rechts und links des Verticalstrichs durch die gemeinschaftlichen F. ren, indem man das Product rechts des Strichs als d. Zähler und das Product links desselben als den Nenner eines Bruchs zu betrachten hat. Dieses Aufheben geschieht in folgender Art:

x Thlr. Pr. Cour.	8 Eimer
1 Eimer	84 Fl.
9 Fl.	$5\frac{1}{15}$ Thlr. Conv.
100 Thlr. Conv.	$103\frac{1}{2}$ Thlr. Pr. Cour.

$x = 4.28.4 = 448$ Thlr. Pr. Cour.

3) Wie viel Thlr. kostet 1 Rieß Papier, wenn 5 Bogen 1 Sgr kosten?

Auflösung: Diese einfache Regula de tri-Aufgabe kann sehr bequem nach dem Kettenansatze aufgelöst werden, und zwar wie folgt:

x Thlr.	1 Rieß
1 Rieß	20 Buch
1 Buch	24 Bogen
5 Bogen	1 Sgr.
5 30 Sgr.	1 Thlr.

$5x = 4.4$ Thlr.

$x = \frac{16}{5} = 3$ Thlr. 6 Sgr.

4) Wie viel Metre sind 10 Engl. Fuß, wenn 1 Preuß. Fuß = 1,0297218 Engl. Fuß, ferner 139,13 Pariser Linien = 1 Preuß. Fuß und 3,078444 Pariser Fuß = 1 Metre und 1 Pariser Fuß = 144 Pariser Linien?

Auflösung:

x Metre	10 Engl. Fuß
1,0297218 Engl. Fuß	1 Preuß. Fuß
1 Preuß. Fuß	144 Preuß. Linien
144 Preuß.'''	139,13 Pariser'''
144 Pariser'''	1 Pariser'
3,078444 Pariser'	1 Metre

$$x = \frac{1391{,}3}{456{,}471489} = 3{,}047945 \text{ Metre.}$$

§. 170. Uebungsbeispiele zur Kettenregel.

1) Wie viel Reichsgulden (Fl.) sind 570 Pfd. Waare werth, wenn 150 Fl. 84 Thlr. Preuß. Cour. und 125 Thlr. Preuß. Cour. 300 Mark Hamburger Banco gelten, 100 Pfd. der Waare aber mit 495 Mark Hamb. Banco bezahlt worden sind?
Antw.: $2099\frac{3}{11}\frac{7}{12}$ Reichsgulden.

2) Wie weit wird eine feindliche Batterie in Schritten entfernt sein, wenn man zwischen dem Augenblicke des Abfeuerns und dem Knall 30 Spiralschläge einer Taschenuhr zählt, und bei gewöhnlichen Taschenuhren 25 Spiralschläge in 5 Secunden geschehen, so wie, wenn man weiß, daß der Schall in einer Secunde bei mittlerer Temperatur 896 dc. Fuß zurücklegt, und 10 dc. Fuß gleich 5 Schritt sind?
Antw.: 2800 Schritt.

3) Man hat einen Französischen Plan von 15 Zoll Länge Franz. Maß, welcher ein Terrain von 1000 Pariser Fuß in der Längenausdehnung enthält, und welcher nach Preuß. ddc. Maß auf ein Blatt von 9 Zoll Länge übertragen werden soll; wie viel wird nach Preuß. Maß für jeden Fuß des darzustellenden Planes genommen werden müssen, wenn bekannt ist, daß der Preuß. Fuß zu dem Pariser sich verhält wie 139,13 : 144?
Auflösung: Drückt man die Größe eines Fußes des gesuchten Maßstabes durch x aus, so ergiebt sich folgender Kettenansatz:

x' d. zu bild. Maßstabes	1' Preuß. M.
144' Preuß. M.	139,13' Franz. M.
1000' Franz. M.	1,25' des Franz. Plans
1,25' des Franz. Plans	0,75' d. zu bildenden Plans

x = 0,0007246' d. h. jeder Fuß des verjüngten Maßstabes enthält 0,0007246 Theile des wirklichen Fußes.

4) Wie viel kieferne Bettungsbohlen, à 9' lang, 3'' stark, 12'' breit, lassen sich durch 6 Pferde transportiren, wenn auf jedes Pferd 6 Ctr. Last gerechnet werden, und das specifische Gewicht des kiefernen Holzes zu 0,46, so wie der Kubikfuß Wasser zu 66 Pfd. angenommen wird?

Auflösung:*)

x Bohlen	6 Pferde
1 Pferd	6 Ctr.
1 Ctr.	110 Pfd.
66 Pfd.	1728 Cub." Waſſer
0,46 Waſſer	1 Holz**)
9.12.3.12C" Holz	1 Bohle

x = 57,9 Bohlen.

5) Der Ctr. Lunte giebt 32 Bunde, von denen jedes 90' Lunte enthält. Wie lange wird $\frac{1}{4}$ Ctr. Lunte vorhalten, wenn beſtändig 2 Lunten brennen und die Brennzeit eines Fußes Lunte $1\frac{1}{4}$ Stunde beträgt?
Antw.: $18\frac{3}{4}$ Tage.

6) Wie viel wiegt ein Kubf. Regenwaſſer in Dresdner Maß, wenn ein Franz. Kubf. Regenwaſſer 70 Franz. Pfd. wiegt, 9716 Holländ. Aſſen 1 Dresdner Pfd., 10188 Holländ. Aſſen 1 Franz. Pfd. betragen, und der Franzöſiſche Fuß zum Dresdner ſich verhält, wie 144 : 125,45?
Antw.: 48,5315 Pfd.

7) In Paris koſtet das Kilogramm einer Waare 4 Franc, was koſtet davon das Vereins-Pfd., wenn 1 Kilogramm = 2,138072 Preuß. Pfd., 100 Pfd. des Vereins = 1 Vereins-Ctr. und 1000000 Vereins-Ctr. = 971851 Preuß. Ctr. ſind, und ferner 1 Franc zu 8 Sgr. 1 Pf. gerechnet wird?
Antw.: 16 Sgr. $2\frac{97}{534518}$ Pf.

8) 1 Pfd. Rindfleiſch koſtet in Berlin $2\frac{1}{2}$ Sgr. und in Paris 2 Kilogramme davon 1 Franc 80 Centimen; um wie viel theurer iſt das Pfd. Fleiſch in Paris?
Antw.: Um 10,83... Pf. theurer, ſo daß das Preuß. Pfd. in Paris 3 Sgr. 4,83... Pf. koſten würde.

9) Von irgend einer Waare koſten 22 Lth. Vereinsgewicht in Frankfurt a. M. 84 Kreuzer, im 24 Fl. Fuß, wie hoch kommt 1 Preuß.

---

*) Das ſpecifiſche Gewicht iſt die Zahl, welche angiebt, um wie viel mal ein Körper ſchwerer iſt, als ein gleiches Volumen (Raum) Waſſer. Wiegt daher der Cubf. Gußeiſen 508,2 Pfd. und der Cubf. reines Waſſer 66 Pfd., ſo iſt das ſpecifiſche Gewicht des Eiſens $= \frac{508{,}2 \text{ Pfd.}}{66 \text{ Pfd.}} = 7{,}7$. Auf gleiche Weiſe findet man auch das ſpecifiſche Gewicht des kief. Holzes, wenn man das Gewicht eines Cubf. zu 30 bis 31 Fuß annimmt, = 0,46, aus welcher Zahl hervorgeht, daß das kieferne Holz leichter iſt als Waſſer, und mithin auf letzterem ſchwimmen muß.

**) Das Gewicht des Waſſers verhält ſich zum Gewicht des Holzes bei gleichem Volumen, wie 1 : 0,46 aus welcher Proportion folgt: 0,46 Waſſer = 1 Holz; d. h. ein gewiſſes Volumen Holz wiegt ſo viel als 0,46 deſſelben Volumens Waſſer.

oder nach der zusammengesetzten Regeldetri:

$$a : x = \begin{cases} A : 100 \\ n : 1 \end{cases}$$

$$a : x = An : 100$$

$$x = \frac{a.100}{A.n}.$$

Beispiel:

Zu welchem Zinsfuß müssen 1000 Thlr. ausgeliehen werden, wenn sie in 20 Jahren 1000 Thlr. Interessen einbringen sollen?

$$1000 : 100 = \frac{1000}{20} : x$$

$$x = 5 \text{ Proc.}$$

§. 164. Kommen in einer Aufgabe der Zinsrechnung mehr als 5 Größen vor, so muß der Ansatz stets nach der zusammengesetzten Regeldetri geschehen.

Beispiele:

1) Wie viel betragen die Zinsen von 3800 Thlr. in 3 Jahren, wenn bei denselben Procenten 2800 Thlr. in 7 Jahren 1280 Thlr. Interessen geben?

Auflösung: Setzt man die gesuchten Zinsen = x, so ist:

$$x : 1280 = \begin{cases} 3800 : 2800 \\ 3 : 7 \end{cases}$$

$$x : 1280 = 3.3800 : 7.2800$$

$$x = 744 \text{ Thlr. } 14 \text{ Sgr. } 8\tfrac{4}{7} \text{ Pfennige.}$$

2) Wie groß ist ein Kapital, welches in 3 Jahren zu 4 Proc. eben so viel Zinsen trägt, als ein Kapital von 2000 Thlr. zu 5 Proc. in 10 Jahren?

Auflösung: $x : 2000 = \begin{cases} 10 : 3 \text{ (indirect)} \\ 5 : 4 \end{cases}$

$$x : 2000 = 5.10 : 3.4$$

$$x = 8333\tfrac{1}{3} \text{ Thlr.}$$

3) Wie lange müssen 6000 Thlr. zu 4 Procent stehen, um so viel Interessen zu tragen, als 5000 Thlr. zu 5 Procent in 5 Jahren?

Auflösung: 5000 Thlr. 5 Procent 60 Monat

6000 Thlr. 4 Procent x =

x	60
6000	5000
4	5

$$x = 5 \text{ Jahre } 2\tfrac{1}{2} \text{ Monat.}$$

§. 165. Ist bei der Zinsrechnung die Zeit in Monaten und Tagen gegeben, so wird der Monat zu 30 Tagen und das Jahr zu 365 Tagen gerechnet; z. B.:

Wie viel hat Jemand in jeder Woche zu verzehren, der von den Zinsen seiner Kapitalien lebt, die 14600 Thlr. betragen, und zu 5 Procent ausstehen?

„Die Summe der Verhältnißzahlen (S) verhält sich zu der zu theilenden Zahl (A), wie jede Verhältnißzahl zu ihrem proportionirten gesuchten Theile.“

Aus dieser Proportion, nämlich: $S : A = \begin{cases} a : x \\ b : y \\ c : v \\ d : z \end{cases}$

folgt aber nach §. 140: $x = \frac{aA}{S}$

$$y = \frac{bA}{S}$$

$$v = \frac{cA}{S}$$

$$z = \frac{dA}{S}.$$

2) Vier Personen, A, B, C und D, kaufen ein Lotterie-Loos für 30 Thlr., wozu A 11 Thlr., B 7 Thlr., C 8 Thlr. und D 4 Thlr. beiträgt. Das Loos kommt mit 20000 Thlr. heraus, wie viel erhält jeder von diesem Gewinn?

Auflösung: Die Vertheilung des Gewinnes wird hier nach dem Verhältnisse der Einlagen geschehen müssen, und man hat:

$11+7+8+4 = 30$ (Summe der Verhältnißzahlen), daher:

$30 : 20000 = 11 : x$
$= 7 : y$
$= 8 : z$
$= 4 : v.$

Folglich erhält: $A = x = \frac{11.2000}{3} = 7333\frac{1}{3}$ Thlr.

$B = y = \frac{7.2000}{3} = 4666\frac{2}{3}$ Thlr.

$C = z = \frac{8.2000}{3} = 5333\frac{1}{3}$ Thlr.

$D = v = \frac{4.2000}{3} = 2666\frac{2}{3}$ Thlr.

20000 Thlr.

3) Wie viel Salpeter, Schwefel und Kohle sind in 1520 Pfd. Pulver enthalten, wenn auf 100 Pfd. Pulver 75 Theile Salpeter, $11\frac{1}{2}$ Theile Schwefel und $13\frac{1}{2}$ Theile Kohle gerechnet werden?

Auflösung: Nennt man den Antheil des Salpeters x, den des Schwefels y und den der Kohle z, so ist:

$x : 75 = y : 11\frac{1}{2} = z : 13\frac{1}{2}$,

Pfd. in Preuß. Thlr. zu stehen, wenn ein Preuß. Thlr. zu 104 Kreuzer, 24 Fl. Fuß, angenommen wird, und das Verhältniß des Vereinsgewichts nach §. 122 bestimmt wird?
Antw.: 1 Thlr. 10,9 Pf.

Sechszehntes Kapitel.

Von der Gesellschafts- und Alligations-Rechnung.

A. Die Gesellschafts- oder Repartitions-Rechnung.

§. 171. Die Gesellschaftsrechnung lehrt eine Zahl in mehrere Theile theilen, die sich wie gegebene Zahlen verhalten.

Ist die Theilung nach gegebenen einfachen Verhältnissen zu bewerkstelligen, so hat man die einfache Gesellschaftsrechnung; kommen dagegen in einer derartigen Aufgabe zusammengesetzte Verhältnisse vor, so wird dieser specielle Fall die zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung genannt.

I. Die einfache Gesellschaftsrechnung.

§. 172. Beispiele:

1) Eine Zahl A soll in vier Theile getheilt werden, die sich verhalten wie die Zahlen a, b, c und d.

Auflösung: Nennt man die zu suchenden Theile vorläufig x, y, v und z, so ist, vermöge der in der Aufgabe gestellten Bedingung $a:x=b:y=c:v=d:z$ und demnächst auch nach §. 143

$$a+b+c+d : x+y+v+z = \begin{cases} a : x \\ b : y \\ c : v \\ d : z. \end{cases}$$

Da nun aber $(a+b+c+d)$ die Summe der gegebenen Verhältnißzahlen ist, und $(x+y+v+z)$ gleich der zu theilenden Zahl, so spricht sich obige Proportion in Worten, wie folgt, aus:

„Die Summe der Verhältnißzahlen (S) verhält sich zu der zu theilenden Zahl (A), wie jede Verhältnißzahl zu ihrem proportionirten gesuchten Theile.“

Aus dieser Proportion, nämlich: $S : A = \begin{cases} a : x \\ b : y \\ c : v \\ d : z \end{cases}$

folgt aber nach §. 140: $x = \frac{aA}{S}$

$$y = \frac{bA}{S}$$

$$v = \frac{cA}{S}$$

$$z = \frac{dA}{S}.$$

2) Vier Personen, A, B, C und D, kaufen ein Lotterie-Loos für 30 Thlr., wozu A 11 Thlr., B 7 Thlr., C 8 Thlr. und D 4 Thlr. beiträgt. Das Loos kommt mit 20000 Thlr. heraus, wie viel erhält jeder von diesem Gewinn?

Auflösung: Die Vertheilung des Gewinnes wird hier nach dem Verhältnisse der Einlagen geschehen müssen, und man hat: $11+7+8+4=30$ (Summe der Verhältnißzahlen), daher:

$30 : 20000 = 11 : x$
$= 7 : y$
$= 8 : z$
$= 4 : v.$

Folglich erhält: $A = x = \frac{11.2000}{3} = 7333\frac{1}{3}$ Thlr.

$B = y = \frac{7.2000}{3} = 4666\frac{2}{3}$ Thlr.

$C = z = \frac{8.2000}{3} = 5333\frac{1}{3}$ Thlr.

$D = v = \frac{4.2000}{3} = 2666\frac{2}{3}$ Thlr.

20000 Thlr.

3) Wie viel Salpeter, Schwefel und Kohle sind in 1520 Pfd. Pulver enthalten, wenn auf 100 Pfd. Pulver 75 Theile Salpeter, $11\frac{1}{2}$ Theile Schwefel und $13\frac{1}{2}$ Theile Kohle gerechnet werden?

Auflösung: Nennt man den Antheil des Salpeters x, den des Schwefels y und den der Kohle z, so ist:

$x : 75 = y : 11\frac{1}{2} = z : 13\frac{1}{2}$,

pulver zu reiben. Bei dieser Arbeit werden 8 Procent Verlust in Hundert gut gethan; wie viel Mehlpulver ist abzuliefern? Antw.: 4 Ctr. 84 Pfd. $12\frac{4}{5}$ Lth.

4) Der Ctr. roher Salpeter kostet 20 Thlr., was kostet der Ctr. des 3mal geläuterten, wenn bei jeder Läuterung 5 Procent verloren gehen?

Auflösung: Man hat hier ungerade Verhältnisse, denn je reiner der Salpeter desto weniger erhält man, und um so theurer wird derselbe; also ist:

1) $100 : 100 - 5 = x : 20$

$$x = \frac{20}{0{,}95};$$ Preis nach der Isten Läuterung.

2) $1 : 0{,}95 = x' : \frac{20}{0{,}95}$

$$x' = \frac{20}{0{,}95.0{,}95};$$ Preis nach der 2ten Läuterung.

3) $1 : 0{,}95 = x'' : \frac{20}{0{,}95.0{,}95}$

$$x'' = \frac{20}{0{,}95^3} = \frac{20}{0{,}857375} = 23$$ Thlr. 9 Sgr. 9,6 Pf., und dies ist der Preis eines Ctrs. des 3mal geläuterten Salpeters.

5) Der Ctr. roher Salpeter kostet 21 Thlr. 15 Sgr., was kostet der Ctr. des 3mal geläuterten, wenn bei der Isten Läuterung 8 Procent, bei der 2ten 7 Procent und bei der 3ten 6 Procent verloren gehen? Antw.: 26 Thlr. 21 Sgr. $11\frac{3}{4}$ Pf.; genau $\frac{2}{3}\frac{5}{3}\frac{1}{5}\frac{2}{1}\frac{7}{1}$ Pf.

6) Beim Läutern des Pechs rechnet man 18 Procent Abgang in Hundert, man will 100 Pfd. geläutertes Pech haben, wie viel ungeläutertes gebraucht man dazu? Antw.: 121 Pfd. $30\frac{18}{41}$ Lth.

7) Ein Fabrikant verkauft eine Waare zu 10 Procent Rabatt in Hundert, ein andrer dagegen dieselbe Waare zu 10 Procent Rab. auf Hundert; bei welchem Fabrikanten kauft man am besten, und wie viel beträgt der Unterschied in den Preisen, wenn für 1000 Thlr. Waare gekauft wird?

Auflösung: Der baare Kaufpreis beim Isten Fabrikanten ergiebt sich aus der Proportion:

$100 : 90 = 1000 : x$

$x = 900$ Thlr.; beim 2ten aus d. Proportion:

$110 : 100 = 1000 : x$

$x = 909\frac{1}{11}$ Thlr.

Man kauft daher bei dem ersteren um 9 Thlr. 2 Sgr. $8\frac{8}{11}$ Pf. billiger, und dies giebt, in Procenten ausgedrückt:

$900 : 9\frac{1}{11} = 100 : x$

$$x = \frac{9\frac{1}{11}}{9} = 1\frac{1}{99} = 1{,}0101$$ Procent.

8) Wenn ein Gießer bei Kupfer 3 Procent und bei Zinn 8 Procent Abbrand auf 100 rechnet, und zu einem Guſſe 17 Ctr. 65 Pfd. Metall gebraucht, welches aus 8 Theilen Kupfer und 1 Theil Zinn beſteht, wie viel wird er von jedem Metall in den Ofen bringen müſſen?

Antw.: 16 Ctr. 11,6 Pfd. Kupfer und
2 Ctr. 12,2 Pfd. Zinn
Im Ganzen: 18 Ctr. 23,8 Pfd. Metall.

9) Wenn zu 100000 Flintenpatronen à $\frac{2}{3}$ Lth. Füllung 23 Rieß Patronenpapier gut gethan werden, wie viel Procent Rabatt in Hundert iſt dabei gerechnet worden, wenn 10 Patronen auf den Bogen kommen?

Auflöſung: Zu 100000 Patronen werden 10000 Bogen wirklich verbraucht; es verhält ſich daher:

23.20.24 Bogen : 10000 Bogen = 100 : 100 − x
x = $9\frac{1}{23}$ Procent Rabatt.

C. Die Kettenregel.

§. 169. Wenn in einer Aufgabe das Verhältniß zweier Größen, von denen die eine geſucht werden ſoll, nicht unmittelbar gegeben iſt, ſondern erſt durch mehrere, gleichſam kettenförmig zuſammenhängende, Zwiſchenverhältniſſe gefunden werden muß, ſo hat man eine Aufgabe der Kettenregel. Die Auflöſung aller derartigen Aufgaben kann zunächſt durch eine wiederholte Anwendung der einfachen Regula de tri geſchehen.

Beiſpiele:

1) Ein Eimer Wein koſtet 84 Gulden (Fl.), was koſten 8 Eimer in Thalern ausgedrückt, wenn der Gulden ſich zum Thaler verhält wie 2 : 3?

Auflöſung: Nach der einfachen Regula de tri wird man, da 3 Fl. gleich 2 Thlr. ſind, ſchließen:

3 Fl. : 84 Fl. = 2 Thlr. : x Thlr.

$$x = \frac{2.84}{3} \text{ Thlr., und ſodann:}$$

$$1 \text{ Eimer} : 8 \text{ Eimer} = \frac{2.84}{3} \text{ Thlr.} : x \text{ Thlr.}$$

$$x = \frac{2.8.84}{1.3} = 488 \text{ Thlr.}$$

Der geſuchte Preis iſt alſo durch den Quotienten zweier

Producte ausgedrückt, und dieſe Producte kann man leichter bilden, wenn man die Aufgabe, wie folgt, lieſt: „Wie viel Thaler koſten 8 Eimer, wenn 1 Eimer 84 Fl. koſtet, und 3 Fl. 2 Thlr. ausmachen.“ Alsdann ſchreibt man ſogleich folgenden Kettenanſatz hin:

x Thlr. = 8 Eimer
1 Eimer = 84 Fl.
3 Fl. = 2 Thlr.

Macht man nun die Producte ſämmtlicher Ausdrücke rechts und links der Gleichheitszeichen, ſo erhält man daſſelbe, wie bei der erſteren Auflöſung, nämlich:

$$1.3.x = 2.8.84$$

$$x = \frac{2.8.84}{3} = 448 \text{ Thlr.}$$

2) Was koſten 8 Eimer Wein in Preuß. Courant, wenn ein Eimer 84 Fl. koſtet, 9 Fl. aber in Conventionsgeld $5\frac{5}{6}\frac{5}{9}$ Thlr. und 100 Thlr. Conventionsmünze $103\frac{1}{2}$ Thlr. Preuß. Courant ausmachen?

Auflöſung: a) Nach der einfachen Regula de tri iſt:

1) 1 Eimer : 8 Eimer = 84 Fl. : y Fl.

$$y = 84.8 \text{ Fl.}$$

2) 9 Fl. : 84.8 Fl. = $5\frac{5}{6}\frac{5}{9}$ Thlr. Conv. : z Thlr. Conv.

$$z = \frac{8.84.5\frac{5}{6}\frac{5}{9}}{9} = \frac{8.84.400}{9.69} \text{ Thlr. Cnv.}$$

3) 100 Thlr. Conv. : $\frac{8.84.400}{9.69}$ Thlr. Conv. =

$103\frac{1}{2}$ Thlr. Pr. Cour. : x Thlr. Pr. Cour.

$$x = \frac{8.84.400.103\frac{1}{2}}{9.69.100} = \frac{8.84.400.207}{2.9.69.100} = 448 \text{ Thlr. Pr. Cour.}$$

b) Nach der Kettenregel ergiebt ſich, wenn man in Stelle der Gleichheitszeichen einen Verticalſtrich zieht, folgender Anſatz:

x Thlr. Pr. Cour.	8 Eimer
1 Eimer	84 Fl.
9 Fl.	$5\frac{5}{6}\frac{5}{9}$ Thlr. Conv.
100 Thlr. Conv.	$103\frac{1}{2}$ Thlr. Pr. Cour.
$9.100.x$	$8.84.5\frac{5}{6}\frac{5}{9}.103\frac{1}{2}$

$$x = \frac{8.84.400.207}{2.9.69.100} = 448 \text{ Thlr. Pr. Cour.}$$

Regel: „Bei der Bildung des Kettenansatzes setzt man links von einem Verticalstriche die gesuchte unbekannte Zahl x und rechts daneben die Fragezahl; sodann setzt man wiederum links, unter x, die mit der Fragezahl gleichnamige Zahl und rechts daneben diejenige Zahl, welche der Angabe nach mit ihr gleichen Werth hat. Auf diese Art setzt man die Kette fort, bis zuletzt rechts eine Zahl erscheint, die mit der gesuchten unbekannten Zahl x gleichnamig ist."

Ist dieser Ansatz gebildet, so hebt man rechts und links des Verticalstrichs durch die gemeinschaftlichen F. ren, indem man das Product rechts des Strichs als d. Zähler und das Product links desselben als den Nenner eines Bruchs zu betrachten hat. Dieses Aufheben geschieht in folgender Art:

x Thlr. Pr. Cour.	8 Eimer
1 Eimer	84 Fl.
9 Fl.	$5\frac{5}{6\,5}$ Thlr. Conv.
100 Thlr. Conv.	$103\frac{1}{2}$ Thlr. Pr. Cour.

$x = 4.28.4 = 448$ Thlr. Pr. Cour.

3) Wie viel Thlr. kostet 1 Rieß Papier, wenn 5 Bogen 1 Sgr kosten?

Auflösung: Diese einfache Regula de tri-Aufgabe kann sehr bequem nach dem Kettenansatze aufgelöst werden, und zwar wie folgt:

x Thlr.	1 Rieß
1 Rieß	20 Buch
1 Buch	24 Bogen
5 Bogen	1 Sgr.
5 30 Sgr.	1 Thlr.

$5x = 4.4$ Thlr.

$x = \frac{16}{5} = 3$ Thlr. 6 Sgr.

4) Wie viel Metre sind 10 Engl. Fuß, wenn 1 Preuß. Fuß = 1,0297218 Engl. Fuß, ferner 139,13 Pariser Linien = 1 Preuß. Fuß und 3,078444 Pariser Fuß = 1 Metre und 1 Pariser Fuß = 144 Pariser Linien?

Auflösung:

x Metre	10 Engl. Fuß
1,0297218 Engl. Fuß	1 Preuß. Fuß
1 Preuß. Fuß	144 Preuß. Linien
144 Preuß.'''	139,13 Pariſer'''
144 Pariſer'''	1 Pariſer'
3,078444 Pariſer'	1 Metre

$$x = \frac{1391{,}3}{456{,}471489} = 3{,}047945 \text{ Metre.}$$

§. 170. Uebungsbeiſpiele zur Kettenregel.

1) Wie viel Reichsgulden (Fl.) ſind 570 Pfd. Waare werth, wenn 150 Fl. 84 Thlr. Preuß. Cour. und 125 Thlr. Preuß. Cour. 300 Mark Hamburger Banco gelten, 100 Pfd. der Waare aber mit 495 Mark Hamb. Banco bezahlt worden ſind?
Antw.: $2099\frac{37}{112}$ Reichsgulden.

2) Wie weit wird eine feindliche Batterie in Schritten entfernt ſein, wenn man zwiſchen dem Augenblicke des Abfeuerns und dem Knall 30 Spiralſchläge einer Taſchenuhr zählt, und bei gewöhnlichen Taſchenuhren 25 Spiralſchläge in 5 Secunden geſchehen, ſo wie, wenn man weiß, daß der Schall in einer Secunde bei mittlerer Temperatur 896 dc. Fuß zurücklegt, und 10 dc. Fuß gleich 5 Schritt ſind?
Antw.: 2800 Schritt.

3) Man hat einen Franzöſiſchen Plan von 15 Zoll Länge Franz. Maß, welcher ein Terrain von 1000 Pariſer Fuß in der Längenausdehnung enthält, und welcher nach Preuß. ddc. Maß auf ein Blatt von 9 Zoll Länge übertragen werden ſoll; wie viel wird nach Preuß. Maß für jeden Fuß des darzuſtellenden Planes genommen werden müſſen, wenn bekannt iſt, daß der Preuß. Fuß zu dem Pariſer ſich verhält wie 139,13 : 144?
Auflöſung: Drückt man die Größe eines Fußes des geſuchten Maßſtabes durch x aus, ſo ergiebt ſich folgender Kettenanſatz:

x' d. zu bild. Maßſtabes	1' Preuß. M.
144' Preuß. M.	139,13' Franz. M.
1000' Franz. M.	1,25' des Franz. Plans
1,25' des Franz. Plans	0,75' d. zu bildenden Plans

x = 0,0007246' d. h. jeder Fuß des verjüngten Maßſtabes enthält 0,0007246 Theile des wirklichen Fußes.

4) Wie viel kieferne Bettungsbohlen, à 9' lang, 3'' ſtark, $\frac{12}{12}$'' breit, laſſen ſich durch 6 Pferde transportiren, wenn auf jedes Pferd 6 Ctr. Laſt gerechnet werden, und das ſpecifiſche Gewicht des kiefernen Holzes zu 0,46, ſo wie der Kubikfuß Waſſer zu 66 Pfd. angenommen wird?

Auflösung:*)

x Bohlen	6 Pferde
1 Pferd	6 Ctr.
1 Ctr.	110 Pfd.
66 Pfd.	1728 Cub." Waſſer
0,46 Waſſer	1 Holz**)
9.12.3.12C" Holz	1 Bohle

x = 57,9 Bohlen.

5) Der Ctr. Lunte giebt 32 Bunde, von denen jedes 90' Lunte enthält. Wie lange wird $\frac{1}{4}$ Ctr. Lunte vorhalten, wenn beſtändig 2 Lunten brennen und die Brennzeit eines Fußes Lunte $1\frac{1}{4}$ Stunde beträgt?
Antw.: $18\frac{3}{4}$ Tage.

6) Wie viel wiegt ein Kubf. Regenwaſſer in Dresdner Maß, wenn ein Franz. Kubf. Regenwaſſer 70 Franz. Pfd. wiegt, 9716 Holländ. Aſſen 1 Dresdner Pfd., 10188 Holländ. Aſſen 1 Franz. Pfd. betragen, und der Franzöſiſche Fuß zum Dresdner ſich verhält, wie 144 : 125,45?
Antw.: 48,5315 Pfd.

7) In Paris koſtet das Kilogramm einer Waare 4 Franc, was koſtet davon das Vereins-Pfd., wenn 1 Kilogramm = 2,138072 Preuß. Pfd., 100 Pfd. des Vereins = 1 Vereins-Ctr. und 1000000 Vereins-Ctr. = 971851 Preuß. Ctr. ſind, und ferner 1 Franc zu 8 Sgr. 1 Pf. gerechnet wird?
Antw.: 16 Sgr. $2\frac{97}{53451180}$ Pf.

8) 1 Pfd. Rindfleiſch koſtet in Berlin $2\frac{1}{2}$ Sgr. und in Paris 2 Kilogramme davon 1 Franc 80 Centimen; um wie viel theurer iſt das Pfd. Fleiſch in Paris?
Antw.: Um 10,83... Pf. theurer, ſo daß das Preuß. Pfd. in Paris 3 Sgr. 4,83... Pf. koſten würde.

9) Von irgend einer Waare koſten 22 Lth. Vereinsgewicht in Frankfurt a. M. 84 Kreuzer, im 24 Fl. Fuß, wie hoch kommt 1 Preuß.

---

*) Das ſpecifiſche Gewicht iſt die Zahl, welche angiebt, um wie viel mal ein Körper ſchwerer iſt, als ein gleiches Volumen (Raum) Waſſer. Wiegt daher der Cubf. Gußeiſen 508,2 Pfd. und der Cubf. reines Waſſer 66 Pfd., ſo iſt das ſpecifiſche Gewicht des Eiſens $= \frac{508{,}2 \text{ Pfd.}}{66 \text{ Pfd.}} = 7{,}7$. Auf gleiche Weiſe findet man auch das ſpecifiſche Gewicht des kief. Holzes, wenn man das Gewicht eines Cubf. zu 30 bis 31 Fuß annimmt, = 0,46, aus welcher Zahl hervorgeht, daß das kieferne Holz leichter iſt als Waſſer, und mithin auf letzterem ſchwimmen muß.

**) Das Gewicht des Waſſers verhält ſich zum Gewicht des Holzes bei gleichem Volumen, wie 1 : 0,46 aus welcher Proportion folgt: 0,46 Waſſer = 1 Holz; d. h. ein gewiſſes Volumen Holz wiegt ſo viel als 0,46 deſſelben Volumens Waſſer.

Pfd. in Preuß. Thlr. zu stehen, wenn ein Preuß. Thlr. zu 104 Kreuzer, 24 Fl. Fuß, angenommen wird, und das Verhältniß des Vereinsgewichts nach §. 122 bestimmt wird?
Antw.: 1 Thlr. 10,9 Pf.

Sechszehntes Kapitel.

Von der Gesellschafts- und Alligations-Rechnung.

A. Die Gesellschafts- oder Repartitions-Rechnung.

§. 171. Die Gesellschaftsrechnung lehrt eine Zahl in mehrere Theile theilen, die sich wie gegebene Zahlen verhalten.

Ist die Theilung nach gegebenen einfachen Verhältnissen zu bewerkstelligen, so hat man die einfache Gesellschaftsrechnung; kommen dagegen in einer derartigen Aufgabe zusammengesetzte Verhältnisse vor, so wird dieser specielle Fall die zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung genannt.

I. Die einfache Gesellschaftsrechnung.

§. 172. Beispiele:

1) Eine Zahl A soll in vier Theile getheilt werden, die sich verhalten wie die Zahlen a, b, c und d.

Auflösung: Nennt man die zu suchenden Theile vorläufig x, y, v und z, so ist, vermöge der in der Aufgabe gestellten Bedingung $a:x=b:y=c:v=d:z$ und demnächst auch nach §. 143

$$a+b+c+d : x+y+v+z = \begin{cases} a : x \\ b : y \\ c : v \\ d : z. \end{cases}$$

Da nun aber $(a+b+c+d)$ die Summe der gegebenen Verhältnißzahlen ist, und $(x+y+v+z)$ gleich der zu theilenden Zahl, so spricht sich obige Proportion in Worten, wie folgt, aus:

„Die Summe der Verhältnißzahlen (S) verhält sich zu der zu theilenden Zahl (A), wie jede Verhältnißzahl zu ihrem proportionirten gesuchten Theile.“

Aus dieser Proportion, nämlich: $S : A = \begin{cases} a : x \\ b : y \\ c : v \\ d : z \end{cases}$

folgt aber nach §. 140: $x = \frac{aA}{S}$

$$y = \frac{bA}{S}$$

$$v = \frac{cA}{S}$$

$$z = \frac{dA}{S}.$$

2) Vier Personen, A, B, C und D, kaufen ein Lotterie-Loos für 30 Thlr., wozu A 11 Thlr., B 7 Thlr., C 8 Thlr. und D 4 Thlr. beiträgt. Das Loos kommt mit 20000 Thlr. heraus, wie viel erhält jeder von diesem Gewinn?

Auflösung: Die Vertheilung des Gewinnes wird hier nach dem Verhältnisse der Einlagen geschehen müssen, und man hat: $11+7+8+4=30$ (Summe der Verhältnißzahlen), daher:

$30 : 20000 = 11 : x$
$= 7 : y$
$= 8 : z$
$= 4 : v.$

Folglich erhält: $A = x = \frac{11.2000}{3} = 7333\frac{1}{3}$ Thlr.

$B = y = \frac{7.2000}{3} = 4666\frac{2}{3}$ Thlr.

$C = z = \frac{8.2000}{3} = 5333\frac{1}{3}$ Thlr.

$D = v = \frac{4.2000}{3} = 2666\frac{2}{3}$ Thlr.

20000 Thlr.

3) Wie viel Salpeter, Schwefel und Kohle sind in 1520 Pfd. Pulver enthalten, wenn auf 100 Pfd. Pulver 75 Theile Salpeter, $11\frac{1}{2}$ Theile Schwefel und $13\frac{1}{2}$ Theile Kohle gerechnet werden?

Auflösung: Nennt man den Antheil des Salpeters x, den des Schwefels y und den der Kohle z, so ist:

$x : 75 = y : 11\frac{1}{2} = z : 13\frac{1}{2}$,

also auch: $x : y = 75 : 11\frac{1}{2}$
$y : z = 11\frac{1}{2} : 13\frac{1}{4}$,
oder: $x : y = 75.2 : 23$
$y : z = 23 : 27$ und nach §. 149
$x : y : z = 150 : 23 : 27$.

Nun ist die Summe der Verhältnißzahlen $S = 150 + 23 + 27 = 200$ und $x + y + z = 1520$, daher:

$$200 : 1520 = \begin{cases} 150 : x; \text{ d. i. } x = \frac{150.38}{5} = 1140 \text{ Pfd. Salpt.} \\ 23 : y; \text{ d. i. } y = \frac{23.38}{5} = 174\frac{1}{5} \text{ Pfd. Schw.} \\ 27 : z; \text{ d. i. } z = \frac{27.38}{5} = 205\frac{1}{5} \text{ Pfd. Khle.} \end{cases}$$
$5 : 38$

1520 Pfd. Pulv.

4) Zu einem Feuerwerkssatze werden 130 Pfd. Salpeter, 52 Pfd. Schwefel, 40 Pfd. Kohle und 80 Pfd. Antimonium gebraucht. Man soll das Gewichtsverhältniß dieses Satzes in 100 Theilen ausdrücken.

Auflösung: Da der ganze Satz in 100 gleiche Theile getheilt werden soll, so ist die Frage, wie viel solcher Theile auf die einzelnen Bestandtheile des Satzes kommen. Nennt man nun die gesuchten Antheile x, y, z und v, so ist:

$x : y : z : v = 130 : 52 : 40 : 80$
$= 13 : 5{,}2 : 4 : 8$
$S = 30{,}2$; daher:

$30{,}2 : 100 = 13 : x$; $x = \frac{1300}{30{,}2} = 43{,}046357$ Salpeter,
$= 5{,}2 : y$; $y = \frac{520}{30{,}2} = 17{,}218543$ Schwefel,
$= 4 : z$; $z = \frac{400}{30{,}2} = 13{,}245033$ Kohle,
$= 8 : v$; $v = \frac{800}{30{,}2} = 26{,}490066$ Antimon;

oder näherungsweise: 43,05 Salpeter,
17,22 Schwefel,
13,24 Kohle,
26,49 Antimonium.
100 Theile.

5) Man hat 90 Pfd. Zündlichtersatz, bestehend aus 22 Theilen Salpeter, 6 Theilen Schwefel, 24 Theilen Mehlpulver und 3 Theilen Pech, welcher ausgelaugt werden soll. Wie viel Pfd. Salpeter wird man erhalten, wenn beim Auslaugen 8 Procent Verlust gerechnet werden?

Auflösung: Man bestimme zunächst den reinen Salpeterbetrag, welcher in 90 Pfd. Satz enthalten ist. Hierauf berechne man, wie viel Mehlpulver 90 Pfd. Lichtersatz enthalten und ermittle demnächst auch den Salpetergehalt in diesem Mehl-

pulver. Beide Quantitäten Salpeter geben, nach Abzug von 8 Procent Rabatt in Hundert, den gesuchten Salpeter, welcher in 90 Pfd. Satz enthalten ist.

1) $55 : 90 = 22 : x$
$11 : 18 = 22 : x$
$1 : 18 = 2 : x$
$x = 36$ Pfd. Salpeter in 90 Pfd. Satz.

2) $11 : 18 = 24 : y$
$y = 39{,}273$ Pfd. Mehlpulver in 90 Pfd. Satz.

3) Das Mehlpulver enthält Salpeter, Schwefel und Kohle in dem Verhältnisse $150 : 23 : 27$; $(S = 200)$, daher: $200 : 39{,}273 = 150 : x$
$4 : 39{,}273 = 3 : x$
$x = 29{,}455$ Pfd. Salpeter in 39,273 Pfd. Mehlpulver.

Man hat daher zu 90 Pfd. Zündlichtersatz 36 Pfd. + 29,455 Pfd. = 65,455 Pfd. Salpeter verwendet, wovon beim Auslaugen 8 Procent verloren gehen. Dieser Verlust findet sich aus: $100 : 92 = 65{,}455 : x$, so daß im Ganzen 60 Pfd. 7 Lth. Salpeter beim Auslaugen gewonnen werden.

II. Die zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung.

§. 173. Soll eine Zahl in mehrere Theile getheilt werden, die in einem zusammengesetzten Verhältnisse stehen, so nennt man diese Aufgabe die zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung.

Beispiele:

1) Eine Zahl A soll in 4 Theile getheilt werden, die sich in einer Beziehung wie $a : b : c : d$ und in einer andern wie $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ verhalten; wie groß ist jeder Theil?

Auflösung: Die gesuchten Theile x, y, z, v werden sich, nach der zusammengesetzten Regula de tri, wie $a\alpha : b\beta : c\gamma : d\delta$ verhalten, und man hat alsdann, nach der einfachen Gesellschaftsrechnung:

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta) : A \begin{cases} = a\alpha : x \\ = b\beta : y \\ = c\gamma : z \\ = d\delta : v, \end{cases}$$

aus welchem Ansatze sich die gesuchten Theile ergeben.

2) Unter 6—12pfge, 6—6pfge Kanonen und 4—7pfge Haubitzen

sollen 1000 Pfd. Pulver so vertheilt werden, daß jedes Geschütz gleich viel Schuss erhält.

Auflösung: In diesem Beispiele hängt die Vertheilung des Pulvers einmal von der Anzahl der Geschütze und sodann auch von der Stärke der Ladung ab. Erhält nun der 12Pfder 4 Pfd., der 6Pfder 2½ Pfd. und die 7pfdge Haubitze 1½ Pfd. Ladung, so hat man die Verhältnißzahlen:

6, 6, 4 Anzahl der Geschütze,
4, 2½, 1½ Quantität der Ladung.

Multiplicirt man die letzten Verhältnißzahlen mit dem Generalnenner 4, und alsdann die homologen Verhältnißglieder mit einander, so erhält man das fortlaufende, zusammengesetzte Verhältniß 16:9:4, nach welchem 1000 Pfd. Pulver zu theilen sind. Es ist daher:

$$29:1000 = \begin{cases} 16:x;\ x = 551\frac{1}{29} \text{ Pfd. für die 12Pfder,} \\ 9:y;\ y = 310\frac{10}{29} \text{ Pfd. für die 6Pfder,} \\ 4:z;\ z = 137\frac{17}{29} \text{ Pfd. f. d. 7pfdgn. Haubitzen.} \end{cases}$$

Probe: Man dividire die erhaltenen Pulverquantitäten beziehlich durch die Pulverladung und die Anzahl der Geschütze in der Batterie, so muß man für jedes Geschütz gleich viel, nämlich: $22\frac{3}{29}$ Schuss, erhalten.

3) Drei Schiffer transportiren Pulver, und zwar der 1ste 250 Ctr. 60 Meilen, der 2te 180 Ctr. 90 Meilen und der 3te 100 Ctr. 57 Meilen weit. Das ganze Frachtlohn beträgt 220 Thlr., wie viel bekommt jeder hiervon?

Auflösung: Die Verhältnißzahlen sind:

$$\left.\begin{matrix} 250:180:100 = 25:18:10 \\ 60:90:57 = 20:30:19 \end{matrix}\right\} 25.2:18.3:19\ (S = 123).$$

Nennt man nun den Antheil des 1sten x, den des 2ten y und den des 3ten z, so ergiebt sich:

$x = {}^{1}\frac{2}{123}{}^{0} = 89$ Thlr. 12 Sgr. $11\frac{5}{41}$ Pf.
$y = {}^{1}\frac{8}{123}{}^{0} = 96$ Thlr. 17 Sgr. $6\frac{2}{41}$ Pf.
$z = {}^{\ 4}\frac{1}{123}{}^{0} = 33$ Thlr. 29 Sgr. $6\frac{6}{41}$ Pf.

Unzuverlässige Probe: $x+y+z = 220$ Thlr.

Anmerkung: Die vorstehende Probe ist nicht zuverlässig, weil man auch bei fehlerhafter Bildung der Verhältnißzahlen die Summe $x+y+z = 220$ Thlr. erhalten würde. Man muß daher die Rechnung wiederholen und sich hierdurch überzeugen, daß man die Verhältnißzahlen und deren Summe richtig gebildet hat.

§. 174. Uebungsbeispiele.

1) Man soll den Gehalt an Kupfer und Zinn in einem 12pfdgen

17¾ Ctr. schweren Kanonenrohre angeben, wenn das Stückgut aus 100 Th. Kupfer und 10 Th. Zinn besteht.

Antw.: Das Rohr enthält 16,14 Ctr. Kupfer und 1,61 Ctr. Zinn.

2) An einem Geschäft, bei dem 618¾ Thlr. Verlust eintrat, haben 4 Personen A, B, C, D theilgenommen, und zwar hat A 270 Thlr., B 288 Thlr., C 405 Thlr., D 540 Thlr. eingelegt; wie groß ist der Verlust eines Jeden?

Auflösung: Dividirt man die Verhältnißzahlen durch 9, so verhalten sich die Verlusts-Antheile von A, B, C, D, wie 30 : 32 : 45 : 60, und es verliert:

$$A\ \frac{30.618{,}75}{167} = 111{,}15269 = 111\ \text{Thlr.}\ 4\ \text{Sgr.}\ 6{,}9684\ \text{Pf.}$$

$$B\ \frac{32.618{,}75}{167} = 118{,}56287 = 118\ \text{Thlr.}\ 16\ \text{Sgr.}\ 10{,}6332\ \text{Pf.}$$

$$C = A + \frac{A}{2} = 166{,}72904 = 166\ \text{Thlr.}\ 21\ \text{Sgr.}\ 10{,}4544\ \text{Pf.}$$

$$D = 2A = 222{,}30539 = 222\ \text{Thlr.}\ 9\ \text{Sgr.}\ 1{,}9404\ \text{Pf.}$$

$$618{,}74999 = 618\ \text{Thlr.}\ 22\ \text{Sgr.}\ 5{,}9964\ \text{Pf.}$$

Daß in diesem Beispiele die Summe der Verluste um 0,00001 Thlr. = 0,0036 Pf. zu klein ist, rührt von der Rechnung mit irrationalen Dezimalbrüchen her, weshalb es besser gewesen wäre, den Bruch ⅔ nicht als Dezimalbruch auszudrücken.

3) Vier Personen, A, B, C, D, haben in einem Geschäft 5180 Thlr. gewonnen; dazu gab A vor 4 Jahren 6000 Thlr., B vor 2½ Jahren 5000 Thlr., C vor 2 Jahren 4000 Thlr. und D vor 18 Monaten 3000 Thlr. Wie viel bekommt jeder von obigem Gewinne?

Antw.: A 2537 Thlr. 4 Sgr. 3⅔ Pf.
B 1321 „ 12 „ 10⅔ „
C 845 „ 21 „ 5⅓ „
D 475 „ 21 „ 5⅓ „

4) Ein complett ausgerüstetes 6pfdges Feldkanon mit beladener Protze wiegt ungefähr 4000 Pfd. Wenn nun die Laffete 1½mal so schwer als das Rohr, die unbeladene Protze 1½mal so schwer als die Munition, und diese halb so schwer als die Laffete ist, und wenn ferner die übrigen Ausrüstungsgegenstände 175 Pfd. wiegen, wie schwer sind alsdann die genannten Theile?

Auflösung: Setzt man für das Rohr irgend eine Verhältnißzahl, am bequemsten 1, so ergiebt sich für die Laffete die Verhältnißzahl 1½, für die Munition ¾, und für die unbeladene Protze ¾ . ¾ = 1. Demnach hat man die Verhältnißzahlen: 1 : 1½ : ¾ : 1 = 4 : 6 : 3 : 4, nach welchen (4000—175) = 3825 Pfd. getheilt werden müssen. (S = 17).

Daher ist: $17 : 3825 \begin{cases} = 4 : x \\ = 6 : y \\ = 3 : z \\ = 4 : v \end{cases}$

$x = 900$ Pfd. Gewicht des Rohres.
$y = 1350$ Pfd. = der Laffete.
$z = 675$ Pfd. = der Munition.
$v = 900$ Pfd. = der Protze.

5) In einem Satze ist 3mal so viel Schwefel als Mehlpulver und 2mal so viel Salpeter als Schwefel und Mehlpulver enthalten. Es fragt sich, wie viel Salpeter, Schwefel und Mehlpulver in $10\frac{1}{2}$ Pfd. der Mengung befindlich sind?
Antw.: 7 Pfd. Salpeter, 2 Pfd. 20 Lth. Schwefel und 28 Lth. Mehlpulver.

6) A giebt zum Bau eines Schiffes 9000 Thlr., B 8000 Thlr., C 3000 Thlr., und später zur Befrachtung desselben A für 11000 Thlr., B für 8000 Thlr. und C für 6000 Thlr. Waare. Das Schiff geht auf der See unter und war mit 16000 Thlr., so wie die Waare mit 20000 Thlr. versichert; wie viel verliert jeder Theilnehmer?
Antw.: A verliert 4000 Thlr. B 3200 Thlr. und C 1800 Thlr.

7) Jemand hat 5mal so viel $\frac{1}{12}$ Thlr.-Stücke als $\frac{1}{8}$ Thlr.-Stücke, und 4mal so viel $\frac{1}{8}$ Thlr.-Stücke als $\frac{1}{3}$ Thlr.-Stücke; wenn er nun 24 Thlr. besitzt, wie viel Stücke hat er von jeder Geldsorte?
Auflösung: Man erhält, alles auf Zweigroschen-Stücke bezogen, die Verhältnißzahlen: 20 : 8 : 4 und sodann durch Reduction: 9—$\frac{1}{3}$ Thlr.-Stücke, 36—$\frac{1}{6}$ Thlr.-Stücke und 180—$\frac{1}{12}$ Thlr.-Stücke.

8) 75 Theile Salpeter, $13\frac{1}{2}$ Theile Kohle und $11\frac{1}{2}$ Theile Schwefel bilden den schwarzen, und 75 Theile Salpeter und 25 Theile Schwefel den weißen Pulversatz. Wenn man nun 10 Pfd. weißen Satz mit 5 Pfund schwarzen Satz mengt, wie viel Procent Salpeter, Schwefel und Kohle sind in der Mengung enthalten?
Antw.: 75 Procent Salpeter, $20\frac{1}{2}$ Procent Schwefel und $4\frac{1}{2}$ Procent Kohle.

9) Wenn man 8 Pfd. Zündersatz aus 3 Theilen Mehlpulver, 2 Theilen Salpeter und 1 Theil Schwefel bestehend, zu Zündlichtersatz umarbeiten soll, der aus 24 Theilen Mehlpulver, 22 Theilen Salpeter, 6 Theilen Schwefel und 3 Theilen Pech zusammengesetzt ist; wie viel wird man wenigstens von den einzelnen Bestandtheilen zusetzen müssen?
Auflösung: In 8 Pfd. Zündersatz ist enthalten 4 Pfd. M. Pulver, $1\frac{1}{3}$ Pfd. Schwefel, $2\frac{2}{3}$ Pfd. Salpeter. Da nun das

Verhältniß des Schwefels zum Mehlpulver und Salpeter im Zündlichtersatze ein geringeres als im Zündersatze ist, so wird nur Mehlpulver, Salpeter und Pech zugesetzt werden müssen. Setzt man daher x Pfd. M. Pulver, y Pfd. Salpeter und z Pfd. Pech zu, so verhält sich:

M. Pulv. : Schw. : Salpeter : Pech

24 : 6 22 : 3

(4+x) : $1\frac{1}{3}$: $(2\frac{2}{3}+y)$: z daher:

1) 24 Pfd. M. P. : (4+x) Pfd. M. P. = 6 Pfd. Schw. : $1\frac{1}{3}$ Pfd. Schw.
$x = 1\frac{1}{3}$ Pfd. M. Pulver.

2) 22 Pfd. Salp. : $(2\frac{2}{3}+y)$ Pfd. Slp. = 6 Pfd. Schw. : $1\frac{1}{3}$ Pfd. Schw.
$y = 2\frac{2}{3}$ Pfd. Salpeter.

3) An Pech bedarf man die Hälfte des Schwefels, also:
$z = \frac{2}{3}$ Pfd. Pech.

Es ist daher wenigstens zuzusetzen: $1\frac{1}{3}$ Pfd. Mehlpulver,
$2\frac{2}{3}$ Pfd. Salpeter,
$\frac{2}{3}$ Pfd. Pech.

Auch konnte man schließen:

$1\frac{1}{3}$ Schw. : 6 Schw. = x M. P. : 24 M. P.

$x = 5\frac{1}{3}$ und davon 4 Pfd., welche im Zündersatze vorhanden sind, subtrahirt, giebt $1\frac{1}{3}$ Pfd. Zusatz an Mehlpulver. Auf gleiche Weise findet man den Zusatz der übrigen Bestandtheile.

10) A stellt 4 Pferde auf 3 Tage, B 6 Pferde auf $2\frac{1}{2}$ Tage, C 8 Pferde auf 4 Tage zu einem gemeinschaftlichen Unternehmen, das ihnen 177 Thlr. einbringt; wie viel muß jeder von ihnen bei der Theilung erhalten?

Antw.: A 36 Thlr., B 45 Thlr. und C 96 Thlr.

11) Man hat 3 Sorten Satz; der erste besteht aus 75 Theilen Salpeter, 12 Theilen Schwefel und 13 Theilen Kohle; der zweite aus 70 Theilen Salpeter, 10 Theilen Schwefel und 20 Theilen Kohle, und der dritte aus 74 Th. Salpeter, 8 Th. Schwefel und 18 Th. Kohle. Wenn man nun vom ersten 45 Procent, vom zweiten 25 Procent und vom dritten 30 Procent zusammenmengt, wie viel Salpeter, Schwefel und Kohle sind in 10 Pfd. des gemengten Satzes enthalten?

Auflösung: Man drücke zunächst die einzelnen Bestandtheile der verschiedenen Sätze in den gegebenen Procenten der Mengung aus. Für

den 1. Satz hat man: 100 : 75 = 45 : x; x = 75.0,45 Th. Slpt.
" 2. " " " 100 : 70 = 25 : x'; x' = 70.0,25 " "
" 3. " " " 100 : 74 = 30 : x"; x" = 74.0,30 " "

Daher ist: 17 : 3825 $\begin{cases} = 4 : x \\ = 6 : y \\ = 3 : z \\ = 4 : v \end{cases}$

x = 900 Pfd. Gewicht des Rohres.
y = 1350 Pfd. " der Laffete.
z = 675 Pfd. " der Munition.
v = 900 Pfd. " der Protze.

5) In einem Satze ist 3mal so viel Schwefel als Mehlpulver und 2mal so viel Salpeter als Schwefel und Mehlpulver enthalten. Es fragt sich, wie viel Salpeter, Schwefel und Mehlpulver in 10½ Pfd. der Mengung befindlich sind?
Antw.: 7 Pfd. Salpeter, 2 Pfd. 20 Lth. Schwefel und 28 Lth. Mehlpulver.

6) A giebt zum Bau eines Schiffes 9000 Thlr., B 8000 Thlr., C 3000 Thlr., und später zur Befrachtung desselben A für 11000 Thlr., B für 8000 Thlr. und C für 6000 Thlr. Waare. Das Schiff geht auf der See unter und war mit 16000 Thlr., so wie die Waare mit 20000 Thlr. versichert; wie viel verliert jeder Theilnehmer?
Antw.: A verliert 4000 Thlr. B 3200 Thlr. und C 1800 Thlr.

7) Jemand hat 5mal so viel $\frac{1}{12}$ Thlr.-Stücke als $\frac{1}{8}$ Thlr.-Stücke, und 4mal so viel $\frac{1}{8}$ Thlr.-Stücke als $\frac{1}{3}$ Thlr.-Stücke; wenn er nun 24 Thlr. besitzt, wie viel Stücke hat er von jeder Geldsorte?
Auflösung: Man erhält, alles auf Zweigroschen-Stücke bezogen, die Verhältnißzahlen: 20 : 8 : 4 und sodann durch Reduction: 9—$\frac{1}{3}$ Thlr.-Stücke, 36—$\frac{1}{8}$ Thlr.-Stücke und 180—$\frac{1}{12}$ Thlr.-Stücke.

8) 75 Theile Salpeter, 13½ Theile Kohle und 11½ Theile Schwefel bilden den schwarzen, und 75 Theile Salpeter und 25 Theile Schwefel den weißen Pulversatz. Wenn man nun 10 Pfd. weißen Satz mit 5 Pfund schwarzen Satz mengt, wie viel Procent Salpeter, Schwefel und Kohle sind in der Mengung enthalten?
Antw.: 75 Procent Salpeter, 20½ Procent Schwefel und 4½ Procent Kohle.

9) Wenn man 8 Pfd. Zündersatz aus 3 Theilen Mehlpulver, 2 Theilen Salpeter und 1 Theil Schwefel bestehend, zu Zündlichtersatz umarbeiten soll, der aus 24 Theilen Mehlpulver, 22 Theilen Salpeter, 6 Theilen Schwefel und 3 Theilen Pech zusammengesetzt ist; wie viel wird man wenigstens von den einzelnen Bestandtheilen zusetzen müssen?
Auflösung: In 8 Pfd. Zündersatz ist enthalten 4 Pfd. M. Pulver, 1⅓ Pfd. Schwefel, 2⅔ Pfd. Salpeter. Da nun das

Verhältniß des Schwefels zum Mehlpulver und Salpeter im Zündlichtersatze ein geringeres als im Zündersatze ist, so wird nur Mehlpulver, Salpeter und Pech zugesetzt werden müssen. Setzt man daher x Pfd. M. Pulver, y Pfd. Salpeter und z Pfd. Pech zu, so verhält sich:

M. Pulv. : Schw. : Salpeter : Pech

24 : 6 22 : 3

(4+x) : $1\frac{1}{3}$: $(2\frac{2}{3}+y)$: z daher:

1) 24 Pfd. M. P. : (4+x) Pfd. M. P. = 6 Pfd. Schw. : $1\frac{1}{3}$ Pfd. Schw.
$x = 1\frac{1}{3}$ Pfd. M. Pulver.

2) 22 Pfd. Salp. : $(2\frac{2}{3}+y)$ Pfd. Slp. = 6 Pfd. Schw. : $1\frac{1}{3}$ Pfd. Schw.
$y = 2\frac{2}{3}$ Pfd. Salpeter.

3) An Pech bedarf man die Hälfte des Schwefels, also:
$z = \frac{2}{3}$ Pfd. Pech.

Es ist daher wenigstens zuzusetzen: $1\frac{1}{3}$ Pfd. Mehlpulver,
$2\frac{2}{3}$ Pfd. Salpeter,
$\frac{2}{3}$ Pfd. Pech.

Auch konnte man schließen:

$1\frac{1}{3}$ Schw. : 6 Schw. = x M. P. : 24 M. P.

$x = 5\frac{1}{3}$ und davon 4 Pfd., welche im Zündersatze vorhanden sind, subtrahirt, giebt $1\frac{1}{3}$ Pfd. Zusatz an Mehlpulver. Auf gleiche Weise findet man den Zusatz der übrigen Bestandtheile.

10) A stellt 4 Pferde auf 3 Tage, B 6 Pferde auf $2\frac{1}{2}$ Tage, C 8 Pferde auf 4 Tage zu einem gemeinschaftlichen Unternehmen, das ihnen 177 Thlr. einbringt; wie viel muß jeder von ihnen bei der Theilung erhalten?

Antw.: A 36 Thlr., B 45 Thlr. und C 96 Thlr.

11) Man hat 3 Sorten Satz; der erste besteht aus 75 Theilen Salpeter, 12 Theilen Schwefel und 13 Theilen Kohle; der zweite aus 70 Theilen Salpeter, 10 Theilen Schwefel und 20 Theilen Kohle, und der dritte aus 74 Th. Salpeter, 8 Th. Schwefel und 18 Th. Kohle. Wenn man nun vom ersten 45 Procent, vom zweiten 25 Procent und vom dritten 30 Procent zusammenmengt, wie viel Salpeter, Schwefel und Kohle sind in 10 Pfd. des gemengten Satzes enthalten?

Auflösung: Man drücke zunächst die einzelnen Bestandtheile der verschiedenen Sätze in den gegebenen Procenten der Mengung aus. Für

den 1. Satz hat man: 100 : 75 = 45 : x; x = 75.0,45 Th. Slpt.
" 2. " " " 100 : 70 = 25 : x'; x' = 70.0,25 " "
" 3. " " " 100 : 74 = 30 : x''; x'' = 74.0,30 " "

Schwefel ist im 1sten Satze 12.0,45 Theile
" " " 2ten : 10.0,25 "
" " " 3ten " 8.0,30 "
Kohle ist im 1sten Satze 13.0,45 Theile
" " " 2ten " 20.0,25 "
" " " 3ten " 18.0,30 "

Die Verhältnißzahlen der Mengung sind daher:

Salpeter : Schwefel : Kohle

$(75.0{,}45+70.0{,}25+74.0{,}30) : (12.0{,}45+10.0{,}25+8.0{,}30) : (13.0{,}45+20.0{,}25+18.0{,}30)$,

oder: 73,45 : 10,30 : 16,25.

Die entsprechenden Antheile findet man daher für 10 Pfd. Satz aus:

$$100:10 = \begin{cases} 73{,}45:x;\ x=7{,}345\ \text{Pfd.} = 7\ \text{Pfd.}\ 11{,}04\ \text{Lth. Slptr.} \\ 10{,}3:y;\ y=1{,}03\ \text{Pfd.} = 1\ \text{Pfd.}\ 0{,}96\ \text{Lth. Schw.} \\ 16{,}25:z;\ z=1{,}625\ \text{Pfd.} = 1\ \text{Pfd.}\ 20\ \text{Lth. Kohle.} \end{cases}$$

12) Es bezahlt Jemand die Summe von $1912\frac{1}{2}$ Thlr. in 6 verschiedenen Terminen, so daß die 2te Abschlagssumme $\frac{4}{5}$ der ersteren beträgt; die 3te Abschlagssumme ist $1\frac{1}{2}$mal so groß als die 2te, die 4te beträgt $\frac{3}{4}$ der 3ten, die 5te $\frac{2}{3}$ der 4ten, und die 6te $\frac{3}{5}$ der 5ten. Wie viel beträgt jede Abschlagszahlung für sich in Thalern ausgedrückt?

Auflösung: Nach den Bedingungen der Aufgabe ist gegeben, wenn man A, B, C, D, E, F die verschiedenen Abschlagszahlungen nennt:

$$A : B = 1 : \tfrac{4}{5}$$
$$C : B = 1\tfrac{1}{2} : 1$$
$$D : C = \tfrac{3}{4} : 1$$
$$E : D = \tfrac{2}{3} : 1$$
$$F : E = \tfrac{3}{5} : 1$$

Aus diesen Proportionen muß man nun eine fortlaufende Proportion nach §. 149 bilden, und erhält:

$$A : B = 5 : 4 = 15 : 12$$
$$C : B = 5 : 3 = 20 : 12$$
$$D : B = 5 : 4 = 15 : 12$$
$$E : B = 1 : 2 = 6 : 12$$
$$F : B = 1 : 3 = 4 : 12.$$

Also ist: $A:B:C:D:E:F = 15:12:20:15:6:4$ und

$(15+12+20+15+6+4) : 1912\frac{1}{2} = 15 : A$

u. s. w. daher:

$A = 398\frac{7}{16}$ Thlr:
$B = 318\frac{3}{4}$ Thlr.
$C = 531\frac{1}{4}$ Thlr.

$D = 398\frac{7}{16}$ Thlr.
$E = 159\frac{3}{8}$ Thlr.
$F = 106\frac{1}{4}$ Thlr.

13) Anstatt 1000 Scheffel Hafer sollen der Quantität nach $\frac{2}{3}$ in Gerste und $\frac{3}{5}$ in Roggen geliefert werden; wie viel Scheffel Gerste und Roggen sind in Empfang zu nehmen?

Auflösung: Theilt man zunächst 1000 Scheffel nach dem Verhältniß 2 : 3, so erhält man 400 Scheffel + 600 Scheffel = 1000 Scheffel. Nun sind aber 16 Metzen Hafer = 13 Metzen Gerste = 9 Metzen Roggen der Qualität nach; also ist:

$16 : 13 = 400 : x$ und
$16 : 9 = 600 : y$
$x = 325$ Scheffel Gerste.
$y = 337\frac{1}{2}$ Scheffel Roggen.

14) Eine Dorfschaft hat 1500 Scheffel Hafer für 3 Batterien zu liefern; es finden sich aber nur 500 Scheffel Hafer vor und es wird nachgegeben, daß die Lieferung, dem Werthe nach, aus gleich viel Hafer, Gerste und Roggen bestehen darf, wobei angenommen wird, daß 16 Scheffel Hafer = 13 Scheffel Gerste = 9 Scheffel Roggen sind. Ferner ist die 1ste Batterie 166 Pferde, die 2te 114 Pferde und die 3te 90 Pferde stark, und es erhalten von diesen Pferden bei der 1sten Batterie 150, bei der 2ten 100 und bei der 3ten 80 Pferde schwere Feldrationen, die übrigen aber leichte Rationen. Wie viel erhält nun jede Batterie an Hafer, Gerste und Roggen? wie viel betragen die Feldrationen in dem gemengten Futter? und auf wie viel Tage wird die empfangene Fourage ausreichen?

Auflösung. Anstatt der 1500 Scheffel Hafer werden geliefert 500 Schffl. Hafer, $406\frac{1}{4}$ Schffl. Gerste und $281\frac{1}{4}$ Schffl. Roggen = $1187\frac{1}{2}$ Schffl. gemengtes Futter. Die 1ste Batterie gebraucht täglich an Hafer $150.3\frac{3}{4} + 16.3 = 610\frac{1}{2}$ Mtzn.; die 2te 417 Mtzn. und die 3te 330 Mtzn. Die Vertheilung obiger Quantitäten geschieht daher nach den Verhältnißzahlen: $610\frac{1}{2} : 417 : 330 = 407 : 278 : 220$; $S = 905$ und

die 1. Batterie erhält davon: 224 Schffl. $13\frac{143}{161}$ Mtzn. Hafer,
182 " $11\frac{37}{161}$ " Gerste,
126 " $7\frac{137}{161}$ " Rggn.

Gemengtes Futter: 534 Schffl. $-\frac{336}{161}$ Mtzn.

die 2. Batterie erhält davon: 153 Schffl. $9\frac{83}{161}$ Mtzn. Hafer,
124 " $12\frac{124}{161}$ " Gerste,
86 " $6\frac{58}{161}$ " Rggn.

Gemengtes Futter: 364 Schffl. $12\frac{64}{161}$ Mtzn.

die 3. Batterie erhält davon: 121 Schffl. $8\frac{86}{161}$ Mtzn. Hafer,
98 = $12\frac{70}{161}$ = Gerste,
68 = $5\frac{167}{161}$ = Rggn.

Gemengtes Futter: 288 Schffl. $10\frac{143}{161}$ Mtzn.

2) Es sind anstatt $3\frac{3}{4}$ Metzen Hafer $2\frac{1}{2}$ Metzen gemengtes Futter und anstatt 3 Mtzn. Hafer $2\frac{1}{2}$ Mtzn. gemengtes Futter zu rechnen, denn man schließt:

$$1500 : 1187\frac{1}{2} = 3\frac{3}{4} : x, \text{ woraus}$$

$$x = 2\frac{3}{4}\frac{1}{2} \text{ Mtzn. folgt.}$$

3) Da jede Batterie nach Verhältniß ihrer Pferdezahl gleich viel Futter erhalten hat, so darf man nur mit dem täglichen Verbrauch in die Futtermenge dividiren, um zu erfahren, wie lange man damit ausreicht. Bei der 3ten Batterie ist der tägliche Verbrauch $80.2\frac{3}{4} + 10.2\frac{3}{4} = \frac{1045}{4}$ Mtz., und hiermit in den Bestand von $\frac{836000}{161}$ Mtzn. dividirt, giebt $17\frac{3}{161}$ Tage.

15) Eine Truppe besteht aus 3mal so viel Unteroffizieren als Offizieren und 12mal so vielen Gemeinen als Unteroffizieren und bezieht an Tractament 500 Thlr. Wenn nun der Gemeine $2\frac{1}{2}$ Thlr., der Unteroffizier noch einmal so viel und der Offizier 4mal so viel als der Unteroffizier erhält, wie viel Offiziere, Unteroffiziere und Gemeine waren bei der Trüppe?

Antw.: 4 Offiziere, 12 Unteroffiziere und 144 Gemeine.

16) 3 Ortschaften haben zusammen 140 Schanzarbeiter, und zwar die Ortschaft A $\frac{1}{4}$ mehr als B, und dagegen B anderthalb mal so viel als C gestellt; wenn nun die Arbeiter aus C noch einmal so lange als die aus A und $1\frac{1}{2}$mal so lange als die aus B gearbeitet haben, pro Mann und Tag aber 15 Sgr. und überhaupt 282 Thlr. ausgezahlt werden, wie viel Mann hat alsdann jeder Ort gestellt, und auf wie viel Tage? was erhält ferner jeder Ort an Lohn, und wie viel jeder Arbeiter?

Antw.: Die Ortschaft A stellt 60 Arbeiter auf 3 Tage, B 48 Arbeiter auf 4 Tage und C 32 Arbeiter auf 6 Tage. Die Ortschaft A erhält ferner 90 Thlr. und jeder Arbeiter aus derselben $1\frac{1}{2}$ Thlr, die Ortschaft B 96 Thlr. und jeder Arbeiter aus derselben 2 Thlr., und endlich die Ortschaft C 96 Thlr. und jeder Arbeiter 3 Thlr.

17) Ein Gießer will Metall, aus 8 Theilen Kupfer und 1 Theil Zinn bestehend, zusammensetzen, und dazu 3 alte Kanonenröhre, à $8\frac{3}{4}$, $8\frac{1}{4}$ und $6\frac{1}{2}$ Ctr. verwenden. Die Metallcomposition in jedem Rohre ist jedoch eine andere, nämlich: bei dem ersten besteht dieselbe aus 6 Th. Kupfer und 1 Th. Zinn, bei dem zweiten aus 9 Th. Kupfer und 2 Th. Zinn und bei dem dritten aus 11

Th. Kupfer und 2 Th. Zinn. Es ist nun die Frage, wie viel Kupfer und Zinn der Gießer mindestens noch zu den Geschützröhren in den Ofen bringen muß, wenn er bei Kupfer auf 5 Proc. und bei Zinn auf 10 Proc. Abbrand zu rechnen hat, um das gewünschte Legirungsverhältniß zu erhalten?

Auflösung: Berechnet man den Inhalt an Kupfer und Zinn in den verschiedenen Röhren, so erhält man im:

1ten Rohre	$7\frac{1}{2}$	Ctr.	Kupfer und	$1\frac{1}{2}$	Ctr. Zinn
2ten "	$6\frac{3}{4}$	Ctr.	" "	$1\frac{1}{2}$	Ctr. "
3ten "	$5\frac{1}{4}$	Ctr.	" "	1	Ctr. "
Zusammen	$19\frac{1}{4}$	Ctr.	Kupfer,	$3\frac{3}{4}$	Ctr. Zinn.

Zinn erleidet 10 Proc. Abbrand, daher ist:

$$110 : 100 = 3\tfrac{3}{4} : x;\quad x = 3\tfrac{9}{11} \text{ Ctr. Zinn.}$$

Bringt der Gießer diese Quantität Zinn in den Ofen, so hat er bei dem gegebenen Legirungsverhältniß 8 mal so viel Kupfer nöthig + 5 Proc., welche beim Zinn zu viel in Abrechnung gestellt wurden. Daher:

$$100 : 105 = 3\tfrac{9}{11}.8 : y$$
$$y = 28\tfrac{7}{11} \text{ Ctr. Kupfer.}$$

Es ist daher noch in den Ofen zu bringen:

$$28\tfrac{7}{11} - 19\tfrac{1}{4} = 8 \text{ Ctr. } 97 \text{ Pfd. } 16 \text{ Lth. Kupfer.}$$

Auch konnte man den Ansatz bilden:

$$\left.\begin{matrix} 110 : 100 \\ 100 : 105 \\ 1 : 8 \end{matrix}\right\} = 3\tfrac{3}{4} \text{ Ctr.} : x + 19\tfrac{1}{4} \text{ Ctr.}$$

B. Die Alligations- oder Mischungsrechnung.

§. 175. Die Alligations- oder Mischungsrechnung findet ihre Anwendung, wenn mehrere Stoffe von verschiedener Qualität so mit einander vermengt oder gemischt werden sollen, daß daraus eine Mengung von mittlerer Qualität entsteht. Die Qualität der Stoffe wird gewöhnlich durch ihren Preis oder auch durch eine andere ihnen eigenthümliche Eigenschaft ausgedrückt, wie z. B. bei den verschiedenen Feuerwerkssätzen durch ihre Brennzeit.

§. 176. Aufgabe. Von einer Materie A hat ein gewisses Gemäß den Preis a, und von einer geringeren Qualität B dieser Masse dasselbe Gemäß den Preis b. In welchem Verhältnisse wird man beide Sorten vermischen müssen, damit eine Mischung entstehe, von welcher dasselbe Gemäß den Mittelpreis n erhalte?

Auflösung: Nehmen wir an, daß x Gemäßeinheiten von der bessern Sorte und y von der schlechtern Sorte verbunden werden müssen, um eine Mischung von dem verlangten Werthe n zu erhalten, so kosten die x Einheiten ax und die y Einheiten by, während die $(x+y)$ Einheiten der Mischung $(x+y)\,n$ kosten. Die mittlere Qualität $(x+y)\,n$ muß nun aber auch gleichen Werth mit den Theilen $ax+by$, aus welchen dieselbe zusammengesetzt wurde, haben; mithin ist: $(x+y)\,n = ax+by$; daher auch: $nx+ny = ax+by$, oder

$$ny-by = ax-nx$$

$$(n-b)y = (a-n)\,x,$$ welche Productengleichung nach §. 140 die Proportion

$$x:y = (n-b):(a-n)$$ giebt.

In Worten: „Es verhält sich die zu nehmende Menge vom bessern Stoff zu der zu nehmenden Menge vom schlechtern Stoff, wie die Differenz des mittleren und schlechteren Werthes zur Differenz des besseren und mittleren Werthes."

Beispiel: Man hat zweierlei Silbersorten, nämlich 8 und 15löthiges und will daraus 12löthiges mischen, in welchem Verhältniß wird dies geschehen müssen? *)

Auflösung: Nennt man den Antheil vom bessern Silber x, und den vom schlechtern y, so ist:

$$x:y = (12-8):(15-12)$$

$$= 4:3$$ d. h. man muß vom 15löthigen 4 Theile und vom 8löthigen 3 Theile nehmen und erhält alsdann 7 Theile 12löthiges Silber.

Gewöhnlich bedient man sich zur Bildung der Verhältnißzahlen folgenden Schemas:

*) Es mag hier für alle Aufgaben der Alligationsrechnung, bei welchen verschiedene Metalle zu einer Legirung verbunden werden sollen, bemerkt werden, daß die Resultate der Rechnung, von den Ergebnissen der Erfahrung abweichen, weil in den meisten Fällen die einfachen Stoffe sich nicht in den angewandten Quantitäten direct verbinden, sondern erst Zwischenverbindungen bilden, die in der Gesammtmasse als mechanisches Gemenge vorkommen. So lange daher die Gesetze für diese Zwischenverbindungen sich nicht ermitteln und demnächst in Rechnung bringen lassen, sind auch die Resultate der Alligationsrechnung nur als ungefähre Anhaltspunkte zu betrachten.

15 4 Verhältnißzahl für das beſſere Silber (15löthiges)

12

8 3 Verhältnißzahl für das ſchlechtere Silb. (8löthiges)

§. 177. Soll von der mittleren Qualität eines Stoffes ein gewiſſes Quantum gebildet werden, ſo tritt, nachdem das Miſchungs-Verhältniß gefunden iſt, die Geſellſchaftsrechnung ein. Z. B. Man hat 15 und 8löthiges Silber und ſoll daraus 36 Mark 12löthiges miſchen; wie viel iſt von jeder Sorte zu nehmen?

Auflöſung: Nach dem vorigen §. findet man die Verhältnißzahlen 4:3 und man ſchließt alsdann: „Es verhält ſich die Summe der Verhältnißzahlen zu der zu bildenden Quantität des mittleren Werthes, wie jede Verhältnißzahl zu ihrem entſprechenden Theile", alſo:

$7 : 36 = 4 : x$; $x = 20\frac{4}{7}$ Mark 15löthiges Silber.

$7 : 36 = 3 : y$; $y = 15\frac{3}{7}$ Mark 8löthiges Silber.

Man muß daher $20\frac{4}{7}$ Mark der beſſern mit $15\frac{3}{7}$ Mark der ſchlechtern Silberlegirung verbinden, um 36 Mark 12löthiges zu erhalten.

§. 178. Einen anderen Fall der Alligationsrechnung enthalten die Aufgaben, bei welchen ein gewiſſes Quantum irgend eines Stoffes gegeben iſt, und nun gefragt wird, wie viel man von einem gleichartigen Stoffe geringerer oder beſſerer Qualität zuſetzen müſſe, um eine Mengung von mittlerer Qualität zu erhalten, z. B.:

Man hat 20 Mark 15löthiges Silber, wie viel 8löthiges muß man damit verſchmelzen, um 12löthiges zu erhalten?

Auflöſung: Nach §. 176 iſt das Miſchungsverhältniß der beſſern und ſchlechtern Sorte 4:3 und man findet die Quantität des zuzuſetzenden ſchlechtern Silbers durch folgenden einfachen Regeldetri-Anſatz:

$4 : 3 = 20$ Mark: x Mark

$x = 15$ Mark 8löthiges Silber.

§. 179. Soll aus der gegebenen Quantität und Qualität mehrerer mit einander zu verbindenden Stoffe die Qualität ihrer Mengung beſtimmt werden, ſo geſchieht ſolches, wie folgt:

Aufgabe: Man hat folgende Haferſorten zuſammengeſchüttet: 10 Scheffel à 1 Thlr., $6\frac{1}{2}$ Scheffel à 28 Sgr. und 23 Scheffel à 27 Sgr.; wie hoch kommt jeder Scheffel der Mengung zu ſtehen?

Auflöſ.; Quantität der Theile, Qualität der Gemäßeinheit, Werth der Theile.

10 Scheffel	30 Sgr.	300 Sgr.
$6\frac{1}{2}$ "	28 "	182 "
23 "	27 "	621 "
$39\frac{1}{2}$ Scheffel koſten		1103 Sgr.

Dividirt man nun mit $39\frac{1}{2}$ in 1103 Sgr., ſo erhält man den Preis eines Scheffels der Mengung = 27 Sgr. 11 Pf.

§. 180. Einen andern Fall der Alligationsrechnung giebt die Aufgabe: „Man ſoll eine gewiſſe Menge eines Stoffes von mittlerer Qualität aus 3 Stoffen von verſchiedener Qualität zuſammenſetzen," z. B.:

Es braucht Jemand 50 Mark 10löthiges Silber und will ſich dieſe dadurch verſchaffen, daß er verſchiedene Silberſorten, nämlich $4\frac{1}{2}$löthiges, 7löthiges und 13löthiges zuſammenſchmilzt, wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

Auflöſung: Man denke ſich zunächſt $4\frac{1}{2}$ und 7löthiges Silber zu einer Mittelſorte, etwa zu 6löthigem verbunden, und beſtimme nun, wie viel 13löthiges und 6löthiges zu 50 Mark 10löthigem Silber gehören.

13 4 x : y = 4 : 3

10

6 3 7 : 50 = 4 : x; x = $28\frac{4}{7}$ Mark 13löthiges
y = $21\frac{3}{7}$ " 6 "

Da nun aber 6löthiges Silber nicht vorhanden iſt, ſo berechne man jetzt, wie viel $4\frac{1}{2}$ und 7löthiges Silber in $21\frac{3}{7}$ Mark 6löthigem enthalten iſt.

7 $\frac{1}{2}$

x : y = $\frac{1}{2}$: 1 = 3 : 2
$5 : 21\frac{3}{7} = 3 : x$
x = $12\frac{6}{7}$ Mark 7löthiges
y = $8\frac{4}{7}$ " $4\frac{1}{2}$ "

6

$\frac{1}{2}$ 1

Die verlangte Miſchung von 50 Mark 10löthigem Silber beſteht daher aus:

$28\frac{4}{7}$	Mark	13löthigem
$12\frac{6}{7}$	"	7 "
$8\frac{4}{7}$	"	$4\frac{1}{2}$ "
50	Mark.	

Bemerkung: Da die zuerst in Rechnung gestellte Mittelsorte zu 4½ und 7 löthigem Silber auch anders angenommen werden konnte, so läßt die vorstehende Aufgabe verschiedene Auflösungen zu. Dergleichen Aufgaben nennt man unbestimmt.

§. 181. Uebungsbeispiele:

1) Ein Kaufmann will aus zwei Sorten Tabak: die bessere Sorte das Pfd. à 20 Sgr. und die geringere das Pfd. à 12½ Sgr., 1 Ctr. Melange, das Pfd. à 15 Sgr., mengen; wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?
Antw.: 36⅔ Pfd. von der bessern und 73⅓ von der schlechtern Sorte.

2) Man hat zweierlei Zündersätze; von dem einen brennt eine gewisse Länge 30 Secunden und von dem andern 20 Secunden. Man will aus beiden Sätzen 50 Pfd. Satz mischen, dessen Brennzeit bei gleicher Länge der Röhre 23 Secunden beträgt; wie viel ist von jedem Satze zu nehmen? *)
Antw.: 35 Pfd. vom raschen und 15 Pfd. vom langsamen Satz.

3) Man hat 8 Pfd. Zündlichtersatz, der bei einer gewissen Länge der Hülse 20 Secunden brennt; wie viel muß man von einem Satze zumengen, welcher unter gleichen Umständen 30 Secunden brennt, um eine Mengung, deren Brennzeit 23 Secunden beträgt, zu erhalten?
Antw.: 3⅗ Pfd. vom raschen Satze sind zu den 8 Pfd. des langsameren Satzes zuzusetzen.

4) Wie viel Wasser muß man zu 50 Quart Wein à 20 Sgr. zugießen, wenn das Quart nur 15 Sgr. kosten soll?
Auflösung. 20 15

15

0 5

15 : 5 = 50 : x
x = 16⅔ Quart Wasser.

5) Man hat zweierlei Kanonenmetall. Das erstere enthält auf 100 Theile Kupfer 13 Theile Zinn und das zweite 8½ Theile Zinn. Wie viel ist von beiden Metallen zu nehmen, um 66 Ctr. Metall zu erhalten, welches auf 100 Theile Kupfer 10 Theile Zinn enthält?
Antw.: 22 Ctr. des 1sten und 44 Ctr. des 2ten Metalles.

6) 37 Pfd. Zinn verlieren im Wasser gewogen 5 Pfd., und 23 Pfd. Blei verlieren im Wasser gewogen 2 Pfd. Eine Composition

*) Da die Brennzeit eines Feuerwerks-Satzes den Bestandtheilen desselben nicht genau proportionirt ist, so können auch die Resultate der Alligationsrechnung, in allen derartigen Beispielen, nur als Annäherungswerthe betrachtet werden.

von Zinn und Blei, 120 Pfd. wiegend, verliert dagegen im Waſſer 14 Pfd. Wie viel Zinn und Blei iſt in dieſer Compoſition?

Auflöſung: In dieſem Beiſpiele giebt der Gewichtsverluſt im Waſſer die Qualität an, und der beſſere Stoff iſt derjenige, welcher am wenigſten im Waſſer verliert; mithin das Blei der beſſere. Um nun die Verhältnißzahlen, welche ſich ſtets auf gleiche Quantitäten beziehen müſſen, zu erhalten, beſtimme man, wie viel 1 Pfd. von jedem der gegebenen 3 Metalle im Waſſer an Gewicht verliert, und zwar durch die Proportion: 37 Pfd. Zinn verliren im Waſſer 5 Pfd., was verliert 1 Pfd.? Man findet:

1 Pfd. Zinn verliert im Waſſer 0,135 Pfd.
1 Pfd. Blei " " " 0,087 "
1 Pfd. Compoſitionsmetall " 0,116 "

Man hat alſo, analog dem Früheren, folgenden Anſatz:

0,087 — 0,019 Verhältnißzahl für Blei

0,116

0,135 — 0,029 " " Zinn;

— 0,048

daher: $-0{,}048 : -0{,}029 = 120 : x$; $x = 72\frac{1}{2}$ Pfd. Zinn.
$-0{,}048 : -0{,}019 = 120 : y$: $y = 47\frac{1}{2}$ Pfd. Blei.

7) Man hat dreierlei Zünderſätze: von der 1ſten Sorte brennt eine Röhre von 4 Zoll Länge 16 Secunden, von der 2ten 21 Secunden und von der 3ten 31 Secunden. Wie lange wird ein 5 Zoll langer Zünder von einer Miſchung brennen, welche aus 6 Theilen der 1ſten, 4 Theilen der 2ten und 16 Theilen der 3ten Sorte beſteht?

Auflöſung: Man beſtimme zunächſt die Brennzeit eines 4 Zoll langen Zünders, wenn er mit der gegebenen Miſchung geſchlagen wird, (§. 179); dieſelbe findet ſich = 26 Secunden. Alsdann iſt: $4 : 5 = 26 : x$; $x = 32\frac{8}{9}$ Secunden die Brennzeit eines 5 Zoll langen Zünders.

8) Es will Jemand 30 Quart Wein à 10 Sgr und 40 Quart à $12\frac{1}{2}$ Sgr. ſo mit einer 3ten Sorte, von welcher das Quart 16 Sgr. koſtet, verbinden, daß jedes Quart der Miſchung 14 Sgr. zu ſtehen kommt. Wie viel Quart à 16 Sgr. ſind hierzu erforderlich, und wie viel beträgt die ganze Miſchung?

Auflöſung: 30 Quart à 10 Sgr. koſten 300 Sgr.
40 " à $12\frac{1}{2}$ " " 500 "

70 Quart der Miſchung koſten 800 Sgr.; daher jedes Quart derſelben $\frac{800}{70} = 11\frac{4}{7}$ Sgr. Nun iſt die Frage, wi

viel Quart à 16 Sgr. zu 70 Quart à 11½ Sgr. zuzugießen sind, damit das Quart 14 Sgr. koste. Man findet 90 Quart und die ganze Mischung besteht aus 160 Quart.

9) Die Krone des Königs Hiero von Syracus, bestehend aus Gold und Silber, wog 20 Pfd. Wie viel Gold und Silber mußte diese Krone enthalten, wenn sie im Wasser 1¼ Pfd. verlor und sowohl 19,64 Pfd. Gold, als auch 10,5 Pfd. Silber im Wasser 1 Pfd verlieren?

Auflös: 1 Pfd. Gold verliert im Wasser $\frac{1}{19,64} = 0,051$

1 Pfd. Silber " " " $\frac{1}{10,5} = 0,0952$

1 Pfd. der Composition verl. im " $\frac{1\frac{1}{4}}{20} = 0,0625.$

x Pfd. Gold: y Pfd. Silber = 0,0327 : 0,0115

x = 14,8 Pfd. Gold

y = 5,2 Pfd. Silber.

10) Ein Feuerwerker füllt 2 gleich weite Röhren: Die 1ste mit einem Satze bestehend aus 10 Theilen Salpeter, 5 Theilen Schwefel und 3 Th. Mehlpulver, die 2te mit einem Satze bestehend aus 8 Th. Salpeter, 3 Th. Schwefel und 1 Th. Mehlpulver. Von ersterem brennen 3 Zoll 14 Secunden, von letzterem 2 Zoll 15 Secunden. Wie viel Salpeter, Schwefel und Mehlpulver wird eine Mengung aus diesen beiden Sätzen enthalten müssen, wenn der Zoll einer eben so weiten, damit gefüllten Röhre 6 Secunden brennen soll?

Auflösung: Vom ersten Satze brennt 1 Zoll $\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$ Secunden, vom 2ten 1 Zoll 7½ Secunden.

4⅔ 1½ 9 Theile sind vom 1sten Satz und

6

7½ 1½ 8 Theile vom 2ten zu nehmen. Dieses Verhältniß bezieht sich aber auch auf die einzelnen Bestandtheile; mithin ist zu nehmen

vom 1sten Satz: 10.9 Th. Salp. 5.9 Th. Schw. u. 3.9 Th. M.-P.

vom 2ten Satz: 8.8 Th. " 3.8 Th. " " 1.8 Th. " "

In der Mengung 154 Th. Salp., 69 Th. Schw., 35 Th. M.-P.

11) Es besitzt Jemand eine goldene, mit Silber verzierte Schaale, welche 2 Mark 6 Loth 2,224 Quentchen wiegt und einen kubischen Inhalt von 2 Kubikzoll hat. Wie viel Gold und Silber ist in dieser Schaale, wenn das specifische Gewicht des Goldes 19,25 und das des Silbers 10,5 beträgt und 1 Kubikfuß Wasser 66,1 Pfd. wiegt?

Auflösung: Man hat 2^{cc} Wasser = 9,792 Quentchen und die Schaale = 154,224 Quentchen; daher ist ihr specifisches Ge-

wicht $\frac{154,224}{9,792} = 15,75$. Dies giebt den Ansatz:

19,25 5,25

15,75 x : y = 3 : 2

10,5 3,5

5 : 3 = 154,224 : x; x = 92,5344 Quentchen Gold

5 : 2 = 154,224 : y; y = 61,6896 „ Silber;

oder: 1 Mark 10 Karath 8,4048 Grän Gold und

15 Loth 2 Gran 1,6032 Grän Silber.

12) Aus einer Quantität gemeinen Satz soll der Salpeter ausgelaugt werden und man erhält durch mehrmaliges Aufgießen 300 Quart siedewürdige Lauge zu 7 Loth Mehrgewicht pro Quart als Wasser. Nach dem Concentriren beträgt das Mehrgewicht eines Quarts Lauge 30 Loth. Wie viel krystallisirten Salpeter wird man gewinnen, wenn die Mutterlauge noch 3 Procent Salpeter aufgelöst behält und das specifische Gewicht des Salpeters zu 1,93, so wie das Gewicht eines Kubikfußes Wasser zu 66 Pfd. angenommen wird?

Auflösung: Man berechne zunächst das Gewicht von gleich vielen Theilen Wasser, Salpeter und Lauge.

1 Quart Wasser = $\frac{1}{27}$ Kubikf. = $64^{C''} = \frac{66.32}{27} = 78,22$ Loth.

$64^{C''}$ Salpeter = 78,22.1,93 = 150,96 Loth.

1 Quart Lauge = $64^{C''}$ = 78,22 + 7 = 85,22 Loth.

Hieraus findet sich das Verhältniß des Salpeters und Wassers in der Lauge wie 7 : 65,74 oder, in Procenten ausgedrückt, auf 100 Gewichtstheile Wasser kommen 10,64 Gewichtstheile Salpeter.

300 Quart Lauge wiegen aber 300.85,22 = 25566 Loth, also muß darin enthalten sein:

110,64 : 100 = 25566 : x; x = 23107,37 Loth Wasser

und 2458,63 Loth Salpeter.

Nach dem Concentriren beträgt das Gewicht eines Quarts Lauge 78,22 + 30 = 108,22 Loth und hat man jetzt:

Salpeter : Wasser = 30 : 42,74. Da nun aber bloß Wasser verdunstet, so ergiebt sich das Gewicht des Wassers in der concentrirten Lauge durch die Proportion:

30 : 42,74 = 2458,63 : x; x = 3502,73 Loth und da dieses Wasser (Mutterlauge) noch 3 Procent enthalten soll, so ist: 100 : 3 = 3502,73 : x; x = 105,0819 Loth Salpeter. Diese von dem Salpetergehalt in Abzug gebracht, giebt: 2458,63 — 105,08 = 2353,55 Lth = 73 Pfd. 17,55 Lth. krystallisirten Salpeter.

Die Lehre von den Raumgrößen
(Geometrie).

Einleitung.

§. 1. Die Geometrie umfaßt alle Erkenntniſſe von der Lage, Geſtalt und Größe des Raumes und betrachtet dieſelben in ihrem wiſſenſchaftlichen Zuſammenhange.

§. 2. Der Raum iſt uns gegeben, denn wir ſehen denſelben überall vor uns. Die allgemeinen Eigenſchaften des Raumes ſind:

1) Stetigkeit, d. h. beliebige Begrenzbarkeit und Theilbarkeit.

2) Unendliche Ausdehnbarkeit in die Länge, Breite und Höhe.

Vermöge der Stetigkeit des Raumes können wir denſelben in beſtimmte Grenzen einſchließen und alsdann ſpeciellere Erkenntniſſe an ihm wahrnehmen. So z. B. können wir an einer Stube (begrenzter Raum) die Länge, Breite und Höhe meſſen.

§. 3. Die Grenzen des Raumes ſind Linien, Flächen und Körper. Die Linie iſt eine Ausdehnung in die Länge, die Fläche eine Ausdehnung in die Länge und Breite und der Körper eine Ausdehnung in die Länge, Breite und Höhe. Die Linie hat Punkte, die Fläche Linien und der Körper Flächen zur Grenze. Der Punkt beſitzt keine Ausdehnung und kann daher nicht als Raumgrenze betrachtet werden.

§. 4. Eine ebene Fläche iſt eine Ausdehnung in die Länge und Breite von ſolcher Beſchaffenheit, daß alle Linien, die man durch je zwei in ihr beliebig angenommene Punkte zieht, ganz in dieſelbe fallen; eine ſolche Fläche nennt man auch kurzweg eine Ebene.

§. 5. Jede Raumgrenze wird eine Figur genannt. — Laſſen ſich Figuren ſo auf einander legen, daß ſie mit allen

ihren Grenzen vollständig zusammenfallen, so heißen dieselben congruent. Das Zeichen für diese Eigenschaft der Figuren ist $\cong$.

§. 6. Die ebene Geometrie betrachtet nur solche Figuren, welche mit allen ihren Theilen in einer und derselben Ebene liegen.

Die körperliche Geometrie (Stereometrie) umfaßt dagegen diejenigen Figuren, die nicht mit allen ihren Theilen in eine und dieselbe Ebene fallen.

Nächstdem theilt man die Geometrie in eine niedere und eine höhere ein. Erstere beschäftigt sich nur mit geraden Linien, ebenen Flächen und denjenigen Körpern, welche von ebenen Flächen begrenzt werden, so wie mit den Kreislinien, Kreisflächen und den von diesen Flächen begrenzten Körpern. Die höhere Geometrie hat es dagegen mit allen übrigen krummen Linien, Flächen und Körpern zu thun.

§. 7. Die Stetigkeit des Raumes gestattet die Linien, Flächen und Körper zu messen. Dieselben lassen sich daher als benannte Zahlen ausdrücken, und sind mithin Größen. (Zahlenlehre §. 5.).

§. 8. Grundsätze. *)

Stellen a, b, c, d, und m Raumgrößen vor, so ist:

I. Wenn $a > b$ und $m = m$,
$a + m > b + m$.
In Worten: „Gleiches zu Größerem und Kleinerem addirt, giebt wiederum Größeres und Kleineres."

II. Wenn $a > b$ und $c > d$,
$a + c > b + d$.
In Worten: „Größeres und Kleineres zu Größe-

*) Unter einem Grundsatze versteht man eine Behauptung, deren Richtigkeit und allgemeine Gültigkeit unmittelbar eingesehen wird, ohne daß dazu ein Beweis nöthig wäre. Dagegen werden Sätze, welche eine Behauptung aussprechen, deren Richtigkeit aus bereits bekannten Wahrheiten bewiesen werden muß, Lehrsätze genannt. Ein Beweis kann entweder auf directem oder indirectem Wege geführt werden. Bei dem directen Beweise wird die Gültigkeit der Behauptung als eine nothwendige Folge anderer Sätze dargethan, während man beim indirecten Beweise zeigt, daß jeder andere Fall, als der, welcher behauptet wird, auf Widersprüche führt, und daher nicht zulässig ist.

rem und Kleinerem addirt, giebt wiederum Größeres und Kleineres;“ oder, von der Rechten zur Linken gelesen: „Kleineres und Größeres zu Kleinerem und Größerem addirt, giebt wiederum Kleineres und Größeres.“

III. Wenn $a > b$ und $m = m$,

$a - m > b - m$.

In Worten: „Gleiches von Größerem und Kleinerem subtrahirt, giebt wiederum Größeres und Kleineres.“

IV. Wenn $m = m$ und $a > b$,

$m - a < m - b$.

In Worten: „Größeres und Kleineres von Gleichem subtrahirt, giebt Kleineres und Größeres.“

V. Wenn $a > b$ und $c < d$,

$a - c > b - d$.

In Worten: „Kleineres und Größeres von Größerem und Kleinerem subtrahirt, läßt Größeres und Kleineres.“

Erste Abtheilung.

Die ebene Geometrie.

Erstes Kapitel.

Von den Linien und Winkeln.

A. Von der Gestalt der Linien.

§. 9. Eine Linie kann entweder gerade*) oder krumm sein.

Erklärungen.

1) Der Begriff „gerade Linie" ist gleichbedeutend mit „eine und dieselbe Richtung."

2) Eine Linie wird krumm genannt, wenn sie in keinem Theile gerade ist.

Grundsatz. Durch zwei Punkte kann man sich nur eine gerade Linie gelegt denken.

Anmerkung: Die geometrische Linie kann nur gedacht, nicht aber wirklich dargestellt werden. Um jedoch unserem Erkenntnißvermögen das Vorhandensein einer geometrischen Linie bemerkbar zu machen, so drückt man die wahre (gedachte) Linie bildlich durch einen Strich aus. Ein solcher Strich besitzt jedoch, so fein er auch gezeichnet sein möge, Breite und Dicke, und ist daher etwas Körperliches, d. h. die Linie nicht selbst, sondern nur ein stellvertretendes Zeichen dafür.

---

*) Der Begriff der geraden Linie läßt sich mit Worten nicht erklären. Alle sogenannte Erklärungen, wie z. B. eine Linie sei gerade, wenn sie in einer und derselben Richtung fortgehe, oder: eine gerade Linie sei die kürzeste Ausdehnung zwischen zwei Punkten u. s. w. setzen den Begriff der geraden Linie als bekannt schon voraus, und die umschreibenden Ausdrücke: „eine und dieselbe Richtung," oder: „kürzeste Ausdehnung," würden uns keine deutliche Vorstellung von einer geraden Linie geben, wenn der Begriff derselben in unserem Bewußtsein nicht schon vorhanden wäre.

B. Von der Lage zweier geraden Linien in einer und derselben Ebene.

§. 10. Lehrsatz. Zwei gerade Linien A und B können sich nur in einem Punkte, etwa x, schneiden.

Voraussetzung: A und B sind verschiedene Linien.

Behauptung: A und B schneiden sich nur im Punkte x.

Beweis. Schnitten sich die gegebenen geraden Linien in zwei Punkten, so würden sie nach §. 9. Grundsatz zusammenfallen, d. h. nur eine Linie bilden. Dies ist aber gegen die Voraussetzung; mithin können sich die Linien A und B nur in einem Punkte schneiden.

§. 11. Lehrsatz. Sind zwei gerade Linien einander gleich, so sind sie auch congruent.

Voraussetzung: Linie ab = Linie mn

Behauptung: ab ≅ mn.

Beweis. Legt man die gegebenen Linien mit den Endpunkten b und n auf einander, so müssen auch die andern Endpunkte a und m sich decken; denn fiele m nicht auf a, so wäre auch mn größer oder kleiner als ab, was gegen die Voraussetzung ist. Die Linien ab und mn müssen sich daher bei der obigen Voraussetzung decken.

§. 12. Zwei gerade Linien haben entweder eine gleiche oder eine ungleiche Lage. Haben sie eine gleiche Lage, so schneiden sie sich, selbst bis in's Unendliche verlängert gedacht, auf keiner Seite, und sie heißen alsdann parallel. Das Zeichen für diese Eigenschaft der Linien ist ∥ (gelesen parallel). Haben aber zwei Linien nicht gleiche Lage, so schneiden sie sich in einem Punkte, und sie heißen alsdann sich schneidende Linien, so wie in Bezug auf die Seite, wo sie sich gegen einander neigen, convergirend, und in Bezug auf die Seite, wo sie sich von einander entfernen, divergirend.

§. 13. Je zwei sich schneidende gerade Linien AC und BC (Fig. 1) theilen die unendliche Ebene MNQ, in welcher sie liegen, in zwei Theile, und jeder dieser Theile heißt ein Winkel.

Ein Winkel ist daher ein von zwei sich schneidenden geraden Linien begrenzter Theil einer unendlichen Ebene. Der

Schneidungspunkt C heißt die Spitze oder der Scheitel, und die von C aus bis ins Unendliche verlängert gedachten Linien CA und CB die Schenkel dieſes Winkels.

Man bezeichnet einen Winkel gewöhnlich durch drei Buchſtaben, von denen der in der Mitte ſtehende die Spitze des Winkels anzeigt, und ſetzt dieſen drei Buchſtaben das Winkelzeichen vor, z. B. $< ACB$ oder W. ACB *).

§. 14. Bezeichnen wir von den beiden Winkeln der Ebene MNQ (Fig. 1) den rechts liegenden mit Q, und den links liegenden mit (M+N), und denken wir uns den Schenkel BC um den Punkt C ſo weit herumbewegt, bis er in die Verlängerung von AC, alſo nach CB', fällt; ſo wird W. Q = W. M, und jeder dieſer Winkel heißt alsdann ein geſtreckter Winkel. Iſt aber ein Winkel größer als der geſtreckte, ſo heißt er erhaben, und dagegen hohl, wenn er kleiner als der geſtreckte Winkel iſt; ſo z. B. iſt der W. Q ein hohler, und W. (M+N) ein erhabener.

§. 15. Haben zwei Winkel (W. abd und W. abc Fig. 2) einen gemeinſchaftlichen Schenkel ab, und bilden die beiden andern Schenkel eine gerade Linie dc, ſo heißt jeder dieſer Winkel ein Nebenwinkel des andern. Die Summe zweier Nebenwinkel (W. abd + W. abc) giebt daher ſtets den geſtreckten Winkel.

Sind zwei Nebenwinkel einander gleich (W. ábd = W. ábc Fig. 2), ſo heißt jeder ein rechter Winkel, ſind ſie aber ungleich, ſo wird der, welcher größer als der rechte iſt, z. B. W. abd, ein ſtumpfer, und der, welcher kleiner als der rechte Winkel iſt, z. B. W. abc, ein ſpitzer Winkel genannt.

Den rechten Winkel bezeichnet man durch R und den geſtreckten durch 2 R. Daher iſt: (Fig. 2)

$$W.\,abd > R,\ W.\,abc < R,\ W.\,ábd = W.\,ábc = R,$$

und $W.\,ábd + W.\,ábc = W.\,abd + W.\,abc = 2\,R.$

*) Häufig bezeichnet man auch die Winkel durch griechiſche Buchſtaben: α (Alpha), β (Beta), γ (Gamma), δ (Delta) u. ſ. w., z. B. W. α (Fig. 2).

Jeder Schenkel eines rechten Winkels wird, in Bezug auf den andern Schenkel, eine senkrechte Linie oder Normale genannt. Man drückt diese Eigenschaft zweier Linien durch das Zeichen $\perp$ aus, und hat daher, wenn in Fig. 2 W. $ábd = R$ gegeben ist, $áb \perp bd$, oder auch $db \perp áb$; gelesen „db normal oder senkrecht auf áb".

Der rechte Winkel wird in 90 gleiche, kleinere Winkel getheilt, von denen jeder ein Grad heißt. Jeden Grad theilt man wiederum in 60 gleiche, kleinere Winkel, Minuten genannt, und jede Minute in 60 gleiche Theile, welche Secunden heißen.

Von zwei Winkeln, deren Summe den gestreckten Winkel giebt, heißt jeder das Supplement des andern, während von zwei Winkeln, deren Summe $= R$ ist, jeder das Complement des andern genannt wird.

Zwei Winkel, die einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt haben, und deren Schenkel in gegenseitiger Verlängerung liegen, heißen Scheitelwinkel oder Vertikalwinkel. Hiernach sind W. abc und W. dbe (Fig. 2) Scheitelwinkel.

§. 16. **Lehrsatz.** Sind 2 Winkel einander gleich, so sind sie auch congruent.

Voraussetzung: W. $ABC =$ W. abc (Fig. 3).

Behauptung: W. $ABC \cong$ W. abc.

Beweis. Denkt man sich den W. abc so auf den W. ABC gelegt, daß der Punkt b auf B und der Schenkel bc auf BC zu liegen kommt, so muß auch ab auf AB fallen; denn fiele ab nicht auf AB, so wäre W. abc $\gtrless$ W. ABC, was gegen die Voraussetzung ist. Es muß daher, bei Gleichheit der Winkel, der Schenkel ab ebenfalls auf den Schenkel AB fallen, d. h. die Winkel müssen sich decken.

§. 17. **Folgesatz.** Gestreckte Winkel und rechte Winkel sind beziehlich einander congruent.

Beweis. Gestreckte Winkel, so wie auch rechte Winkel sind einander gleich, mithin auch $\cong$ (§. 16).

§. 18. **Lehrsatz.** Sind zwei Winkel einander gleich, so sind auch ihre Nebenwinkel einander gleich.

Vorausſetzung: W. ABC = W. abc (Fig. 3).
Behauptung: W. ABD = W. abd.

Beweis. Es iſt ABC + ABD = abc + abd = 2 R.
Hiervon ABC = abc ſubtrahirt,
giebt: W. ABD = W. abd, was behauptet wurde.

§. 19. Lehrſatz. Sind zwei Winkel ungleich, ſo hat der größere davon den kleineren, und der kleinere davon den größeren Nebenwinkel.

Vorausſetzung: W. ABD > W. abc (Fig. 3).
Behauptung: W. ABC < W. abd.

Beweis. Es iſt ABD + ABC = abd + abc = 2 R
Hiervon ABD > abc ſubtrahirt,
läßt: W. ABC < W. abd (§. 8. IV).

§. 20. Folgeſätze.

1) Scheitelwinkel ſind einander gleich.
Vorauſſ.: W. α und W. β ſind Scheitelwinkel (Fig. 2).
Behaupt.: W. α = W. β.
Beweis: α und β ſind Nebenwinkel von einem und demſelben W. abd, folglich nach §. 18 einander gleich.

2) Iſt einer von den 4 Scheitelwinkeln um einen Punkt ein rechter, ſo ſind die übrigen Winkel ebenfalls rechte.

3) Die Summe der Winkel, welche um einen Punkt in einer und derſelben Ebene liegen, beträgt 4 R.

C. Von der Lage dreier geraden Linien in einer und derſelben Ebene.

§. 21. Grundſatz. Durch 3 Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, kann man ſich nur eine Ebene gelegt denken.

§. 22. Erklärungen. Drei Punkte A, B und C (Fig. 6), welche nicht in einer geraden Linie liegen, bilden eine Figur ABC, welche Dreieck genannt wird. Die Punkte, welche das Dreieck (Δ) beſtimmen, heißen die Ecken, und die geraden Linien zwiſchen dieſen Punkten die Seiten des Dreiecks.

In Bezug auf ihre Seiten theilt man die Dreiecke in gleichſeitige, gleichſchenklige und ungleichſeitige ein, und in Bezug

auf ihre Winkel in rechtwinklige, spitzwinklige und stumpfwinklige.

Im gleichseitigen Dreieck sind alle drei Seiten gleich, im gleichschenkligen zwei derselben und im ungleichseitigen ist keine Seite der andern gleich.

Im rechtwinkligen Dreieck ist unter den Winkeln ein rechter, im spitzwinkligen sind alle Winkel spitz, und im stumpfwinkligen befindet sich unter den 3 Winkeln ein stumpfer.

Im rechtwinkligen Dreieck heißt die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite die Hypotenuse, und jede der den rechten Winkel einschließenden Seiten eine Kathete.

Verlängert man eine Seite des Dreiecks ABC, z. B. BA nach E (Fig. 6), so entsteht ein Nebenwinkel CAE, welcher ein äußerer Winkel des Dreiecks ABC genannt wird.

Zieht man in einem Dreieck ABC (Fig. 7), auf irgend eine Seite, z. B. auf AB, von der gegenüber liegenden Spitze C eine Normale CE, so heißt diese Normale die Höhe des Dreiecks und die Seite AB, auf welcher diese Normale steht, die Grundlinie des Dreiecks ABC. Jedes Dreieck hat daher 3 Höhen und in Bezug auf diese Höhen auch 3 Grundlinien.

§. 23. Erklärungen. Wenn zwei, in einer Ebene liegende, gerade Linien CD und EF (Fig. 4) von einer dritten AB geschnitten werden, so entstehen 8 Winkel: x, y, p, q, z, v, m, n. Von diesen Winkeln heißen x, z, q, n äußere, und y, p, v, m innere Winkel. Ein äußerer und ein innerer Winkel, welche auf einer und derselben Seite der schneidenden Linie AB liegen, jedoch nicht Nebenwinkel sind, also x und p, q und y, z und m, v und n heißen Gegenwinkel. Je zwei innere oder äußere Winkel, welche auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie liegen, ohne Nebenwinkel zu sein, heißen Wechselwinkel, und zwar nennt man x und n, so wie z und q äußere, dagegen y und m, so wie p und v innere Wechselwinkel.

§. 24. Lehrsatz. Werden zwei gerade Linien von einr dritten geschnitten, und sind zwei Gegenwinkel einander gleich so sind auch:

1) alle übrigen Paare Gegenwinkel, und
2) alle Paare Wechſelwinkel einander gleich, und
3) beträgt die Summe je zweier äußeren oder inneren auf einer Seite der ſchneidenden Linie liegenden Winkel 2 R.

Vorausſ.: $x = p$ (Fig. 4).

Behaupt.: 1) $q = y$; $z = m$; $v = n$.

2) $x = n$; $q = z$; $y = m$; $p = v$.

3) $x+q = z+n = y+p = v+m = 2R$.

Beweis. ad 1. Iſt $x = p$, ſo iſt auch $y = q$ (§. 18)
$v = n$ und $z = m$.

ad 2. Aus $x = p$ $y = q$ u. ſ. w.
und $p = n$ (§. 20. 1) $q = m$
folgt $x = n$. $y = m$.

ad 3. $x = p$ hierzu $z = m$ u. ſ. w.
$q = q$ addirt $n = n$
$x+q = p+q = 2R$. $z+n = m+n = 2R$.

Anmerkung: Iſt eine der Behauptungen dieſes §. als Vorausſetzung gegeben, ſo finden die übrigen Behauptungen ebenfalls ſtatt. Es iſt alſo,

wenn $y = m$, oder $x+q = 2R$ gegeben,
$x = p$, $q = y$, $x = n$,
$z = m$, $y+p = 2R$ u. ſ. w.

§. 25. Lehrſatz. Werden 2 gerade Linien von einer dritten geſchnitten, und iſt der äußere Gegenwinkel $x >$ als ſein innerer p (Fig. 5), ſo iſt auch:

1) Der andere äußere Gegenwinkel $q >$ als ſein innerer y; dagegen ſind alsdann auf der andern Seite der ſchneidenden Linie die äußeren Gegenwinkel $<$ als die inneren:
2) Sind bei derſelben Vorausſetzung die auf der convergirenden Seite liegenden äußeren Wechſelwinkel größer als die auf der divergirenden Seite liegenden, und umgekehrt die auf der erſtern Seite liegenden innern Wechſelwinkel kleiner als die auf der andern Seite liegenden:
3) Die Summe der auf der convergirenden Seite liegenden äußern Winkel iſt größer als 2 R und die Summe der innern Winkel kleiner als 2 R, während auf der divergirenden Seite die Summe der äußern Winkel weniger

als 2R, und dagegen die der innern mehr als 2R beträgt.

Vorausſ.: $x > p$

Behaupt.: 1) $q > y$, $z < m$, $n < v$ 2) $x > n$, $q > z$, $y < m$, $p < v$ 3) $x+q > 2R$, $y+p < 2R$, $v+m > 2R$, $z+n < 2R$.

Beweis. ad 1. $q > y$, $z < m$, $n < v$ } folgt aus §. 19.

ad 2.

$x > p$ gegeben	$y < q$
$p = n$ (§. 20. 1)	$q = m$
$x > n$	$y < m$.
$q > y$	$p < x$
$y = z$	$x = v$
$q > z$	$p < v$

ad 3. Da $x > p$ gegeben, $y < q$

ſo iſt $x+q > p+q$ $y+p < q+p$ (§. 8. I)

d. i. $x+q > 2R$. d. i. $y+p < 2R$.

Da nun $v = x$ und $m = q$, $z = y$ und $n = p$,

ſo iſt auch $v+m > 2R$. $z+n < 2R$.

Anmerkung: Jede in dem vorigen Lehrſatze ausgeſprochene Behauptung kann als Vorausſetzung angenommen werden, und es finden alsdann die genannten Beziehungen zwiſchen den Winkeln ebenfalls ſtatt.

§. 26. Lehrſatz. Wenn zwei gerade, in einer Ebene liegende, Linien CD und EF (Fig. 4) von einer dritten AB geſchnitten werden, und es entſtehen gleiche Gegenwinkel, oder es findet eine andere der 12 Gleichungen des §. 24 ſtatt, ſo ſind dieſe Linien parallel.

Vorausſetzung: W. $x =$ W. p.

Behauptung: $CD \parallel EF$.

Beweis. Da $x = p$, ſo iſt auch $x = n$ und $q = z$ nach §. 24. Denkt man ſich nun die untere Figur ADFB dergeſtalt umgedreht und auf die obere Figur ACEB gelegt, daß der Punkt N der untern Figur auf den Punkt M der obern, und der Punkt M der untern Figur auf den Punkt N der obern zu liegen kommt, ſo müſſen ſich auch die Winkel x und n, ſo wie z und q, weil ſie beziehlich gleich ſind, einander decken. Wollte man nun annehmen, die

Linien DC und FE convergirten oberhalb AB, so müßten sich die auf ihnen liegenden Linien NF und MD mit schneiden. Dächte man sich aber alsdann diese Linien wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückversetzt, so würden sich die geraden Linien DC und FE in zwei Punkten schneiden müssen, was jedoch nach §. 10 nicht möglich ist. Es ist daher die Annahme „die Linien DC und FE schnitten sich auf irgend einer Seite von AB" nicht zulässig, und daher nur der eine Fall, CD ∦ EF *).

§. 27. **Lehrsatz.** Wenn zwei parallele Linien von einer dritten geschnitten werden, so sind alle Paare Gegenwinkel einander gleich und finden alsdann auch die übrigen Gleichungen des §. 24 statt.

Voraussetzung: CD ∦ EF (Fig. 4).

Behauptung: $\mathfrak{W}\, x = \mathfrak{W}.\, p$ u. s. w.

Beweis. Wenn CD und EF parallel sind, so müssen die Beziehungen, welche zwischen den Winkeln oberhalb AB statt finden, auch für die unterhalb AB liegenden Winkel als geltend angesehen werden, weil parallele Linien, der Erklärung nach, sich hinsichts ihrer Lage in nichts von einander unterscheiden. Nimmt man daher $\mathfrak{W}.\, x \gtreqless \mathfrak{W}.\, p$ an, so muß auch auf der andern Seite von AB $\mathfrak{W}.\, z \gtreqless \mathfrak{W}.\, m$ sein. Addirt man nun diese Ungleichungen, so wird

$$x + z \gtreqless p + m \quad (\text{§. 8. II})$$

$$\text{d. i. } 2R \gtreqless 2R.$$

Dieser Widerspruch zeigt also, daß die Annahme $x \gtreqless p$

*) Auf diesen Satz gründet sich das Verfahren, wodurch man parallele Linien, vermittelst eines Dreiecks und Lineals, zeichnen kann. Legt man nämlich das Dreieck mit einer seiner Kanten an das Lineal, so bildet jede andere Kante, wenn man das Dreieck verschiebt, parallele Linien. — Beim Exerciren kommt dieser Satz in Anwendung, wenn zwei Geschützführer während des Front-Marsches Intervalle halten und gerichtet bleiben sollen. Der linke Flügelunteroffizier muß alsdann mit dem rechten Flügelunteroffizier ein und denselben Gegenwinkel halten, während letzterer auf einer, durch zwei vorliegende Punkte festgestellten, senkrechten Linie fortmarschirt. Das Hervorbringen der gleichen Gegenwinkel geschieht aber von Seiten des linken Flügelunteroffiziers dadurch, daß er stets in gleicher Höhe mit dem rechten Flügelunteroffizier marschirt und seine anfängliche, richtige Schulterstellung während des Marsches beibehält.

nicht statt finden kann, und bleibt daher nur der Fall: W. x = W. p, als zulässig übrig.

§. 28. Lehrsatz. Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten, und findet sich, daß die äußern Gegenwinkel auf einer Seite der schneidenden Linie größer sind als ihre innern, so convergiren die beiden Linien auf dieser Seite.

Voraussetzung: W. x > W. p (Fig. 5).

Behauptung: DC und FE schneiden sich oberhalb AB.

Beweis. Zunächst ist darzuthun, daß sich die Linien DC und FE bei der gegebenen Voraussetzung überhaupt schneiden müssen, und sodann, daß ihr Durchschnittspunkt oberhalb AB liegen muß.

1) Nimmt man an, die Linien DC und FE wären ∥, so müßte auch nach §. 27. W. x = W. p sein, was jedoch gegen die Voraussetzung ist; die Linien DC und FE müssen sich daher schneiden.

2) Der Voraussetzung nach ist W. m > W. y und W. v > W. p (§. 25), so daß also, wenn man sich die untere Figur ADFB dergestalt auf die obere gelegt denkt, daß die Punkte N und M auf die Punkte M und N in der obern Figur zu liegen kommen, die Schenkel MD und NF außerhalb der Schenkel MC und NE, etwa nach MF′ und ND′, fallen müssen. Von den Linien-Paaren MC NE und MF′ ND′ kann sich aber, nach §. 10, nur ein Paar schneiden, und dies wird, wie in die Augen fällt, bei dem inneren Linienpaare, nämlich MC NE, der Fall sein; d. h. die Linien DC und FE schneiden sich auf der Seite von AB, wo der äußere Gengenwinkel größer als sein innerer ist.

§. 29. Lehrsatz. Werden zwei sich schneidende Linien von einer dritten geschnitten, so ist auf der Seite, wo die Linien convergiren, jeder äußere Gegenwinkel größer als sein innerer, und es finden demnächst wiederum die Ungleichungen des §. 25 statt.

Voraussf.: DC und FE schneiden sich oberhalb AB (Fig. 5).

Behaupt.: W. x > W. p.

Beweis. Wollte man annehmen, x = p, so müßte nach §. 26 DC ∥ FE sein; dies ist jedoch gegen die Voraussetzung. Wollte man dagegen annehmen, x < p, so müßte nach §. 25 z > m sein, und jetzt würden sich die Linien DC und FE nach §. 28 unterhalb AB schneiden, was aber ebenfalls gegen die Voraussetzung ist. Da nun W. x weder gleich noch kleiner als W. p sein kann, so bleibt kein anderer Fall möglich, als x > p.

§. 30. Folgesätze.

1) Der äußere Winkel in einem Dreieck ist größer, als jeder der innern ihm gegenüberliegenden Winkel.

Behauptung: $\mathfrak{W}.\,DAB > \begin{cases}\mathfrak{W}.\,ACB\\ \mathfrak{W}.\,ABC\end{cases}$ (Fig. 6).

Beweis. Da die sich schneidenden Linien AB und BC von einer dritten DC geschnitten werden, so ist nach §. 29

$$\mathfrak{W}.\,DAB > \mathfrak{W}.\,ACB,$$

aber auch $\mathfrak{W}.\,DAB = \mathfrak{W}.\,EAC > \mathfrak{W}.\,ABC.$

2) In jedem Dreieck ist ein äußerer Winkel = der Summe der beiden innern ihm gegenüber liegenden Winkel.

Behaupt.: $\mathfrak{W}.\,DAB = \mathfrak{W}.\,ACB + \mathfrak{W}.\,ABC$ (Fig. 6).

Beweis. Denkt man sich aus A eine Linie AF ∥ BC gezogen, so ist

$$\mathfrak{W}.\,DAF = \mathfrak{W}.\,ACB \quad (§.\,27)$$
$$\mathfrak{W}.\,FAB = \mathfrak{W}.\,ABC$$
$$\mathfrak{W}.\,DAF + \mathfrak{W}.\,FAB = \mathfrak{W}.\,ACB + \mathfrak{W}.\,ABC$$
$$\mathfrak{W}.\,DAB = \mathfrak{W}.\,ACB + \mathfrak{W}.\,ABC.$$

3) Stehen zwei gerade Linien in einer Ebene auf einer dritten Linie senkrecht, so laufen diese Linien mit einander parallel.

4) Sind zwei Linien mit einander parallel und steht eine derselben auf einer dritten Linie senkrecht, so muß auch die andere auf dieser Linie senkrecht stehen.

5) Sind zwei Linien mit einer dritten parallel, so sind sie auch beide unter sich parallel.

Beweis. Man erhält 3 gleiche Gegenwinkel, und daraus folgt, daß die gegebenen Linien unter sich parallel sind (§. 26).

6) In einer Ebene kann man sich durch einen Punkt mit einer geraden Linie nur eine Parallele gezogen denken.

§. 31. Lehrsatz. In jedem Dreieck ist die Summe der 3 Winkel = 2 R. = 180°.

Behaupt.: $\mathfrak{W}.\,ABC + \mathfrak{W}.\,BCA + \mathfrak{W}.\,CAB = 2\,R$ (Fig. 6).

Beweis.
$$DAB = ABC + ACB \quad (§.\,30.\,2)$$
$$DAB + BAC = ABC + ACB + BAC$$
$$\text{d. i. } 2\,R = ABC + ACB + BAC.$$

§. 32. Folgesätze.

1) In jedem Dreieck ist die Summe zweier Winkel kleiner als 2 R.

Anmerkung. Soll daher aus gegebenen Stücken ein Dreieck gezeichnet werden, und es befinden sich darunter 2 Winkel, so muß deren Summe kleiner als 2 R sein.

2) Ein Dreieck kann nur einen rechten Winkel und auch nur einen stumpfen Winkel haben.

Denn hätte es zwei rechte oder zwei stumpfe Winkel, so wäre die Summe der 3 Winkel größer als 2 R.

3) Von einem Punkt ist nur eine senkrechte Linie auf eine gerade Linie möglich.

Denn gäbe es noch eine zweite Senkrechte, so würde ein Dreieck entstehen müssen, welches zwei rechte Winkel hätte. Ein solches Dreieck ist aber nicht möglich.

Zweites Kapitel.

Von den Dreiecken.

A. Vergleichung der Seiten und Winkel eines Dreiecks.

§. 33. Lehrsatz. Sind in einem Dreieck zwei Seiten einander gleich, so sind auch die denselben gegenüber liegenden Winkel einander gleich.

Voraussetzung: $AC = BC$ (Fig. 7).

Behauptung: $W.ABC = W.BAC$.

Beweis. Man denke sich den Winkel bei C durch die Linie CE halbirt, und die entstandenen Dreiecke ACE und CEB um die Linie CE zusammengeklappt, so wird CA auf CB fallen müssen, weil die Winkel gleich sind §. 16, und der Punkt A auf B zu liegen kommen, weil $AC = BC$ ist. Nun ist aber nach §. 9. zwischen E und B nur eine gerade Linie möglich, mithin fällt AE mit EB zusammen, so daß also die Winkel CAB und CBA sich decken, und folglich einander gleich sind.

§. 34. Lehrsatz. Sind in einem Dreieck zwei Seiten ungleich, so steht der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

Voraussetzung: $BC > AC$ (Fig. 8).

Behauptung: $W.CAB > W.CBA$.

Beweis. Denkt man sich den Winkel bei C halbirt und das Dreieck CBE um die Halbirungslinie CE herumgeklappt, bis es auf Dreieck ACE zu liegen kommt, so wird die größere Seite CB die Lage CB', so wie das ganze Dreieck CEB die Lage CEB' einnehmen. Nun ist aber $W.EAC > W.CB'E$, also auch $W.CAB > W.CBA$, was zu beweisen war.

§. 35. Lehrsatz. Wenn in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich sind, so müssen auch die denselben gegenüber liegenden Seiten einander gleich sein.

Voraussetzung: $W.A = W.B$ (Fig. 7).

Behauptung: $BC = AC$.

Beweis. Wollte man annehmen, $BC \gtrless AC$, so müßte auch $W.A \gtrless W.B$ sein (§. 34.); dies ist jedoch gegen die Voraussetzung. Es bleibt daher kein anderer Fall übrig, als $BC = AC$.

§. 36. Lehrsatz. Sind in einem Dreieck zwei Winkel ungleich, so liegt auch dem größeren davon die größere Seite gegenüber.

Voraussetzung: $W.A > W.B$ (Fig. 8).

Behauptung: $BC > AC$.

Beweis. Wollte man annehmen, $BC \leqq AC$, so müßte auch nach §. 33 und 34. $W.A \leqq W.B$ sein. Dies ist jedoch gegen die Voraussetzung, und es bleibt daher kein anderer Fall übrig, als $BC > AC$.

§. 37. Lehrsatz. In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte, und die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte Seite.

Behauptung: 1) $AC + BC > AB$ (Fig. 9).

2) $AB - AC < BC$.

Beweis. ad 1. Man verlängere AC nach D, mache $CD = CB$, so ist: Dreieck BCD gleichschenklig und $W.x = W.v$

mithin $W.x + W.y > W.v$

daher auch $AD > AB$.

Nun ist aber $AD = AC + CD = AC + BC$ mithin

$AC + BC > AB$.

ad 2. $AC + BC > AB$

$(AC + BC) - AC > AB - AC$

folglich $AB - AC < BC$.

Anmerkung. Soll ein Dreieck aus gegebenen Seiten construirt werden, so muß die Summe je zweier Seiten stets größer als die 3te, ihre Differenz aber stets kleiner als die 3te Seite sein.

§. 38. Folgesätze.

1) Im gleichseitigen Dreieck sind alle 3 Winkel einander gleich, und im ungleichseitigen ist kein Winkel dem andern gleich. Im gleichseitigen Dreieck ist jeder Winkel $= \frac{2R}{3} = \frac{180°}{3} = 60°$.

Gleichen Seiten liegen gleiche Winkel, und ungleichen Seiten ungleiche Winkel gegenüber (§. 33 und 34).

2) Dem stumpfen oder rechten Winkel steht im Dreieck die größte Seite gegenüber.

Der stumpfe oder rechte Winkel ist stets der größte im Dreieck, und dem größten Winkel steht auch die größte Seite gegenüber (§. 36.).

3) Der nicht größesten Seite im Dreieck steht immer ein spitzer Winkel gegenüber.

Wollte man annehmen, es stände ihr ein rechter oder stumpfer Winkel gegenüber, so müßte auch diese Seite die größeste sein, was aber gegen die Voraussetzung ist.

4) Die senkrechte Linie ist die kürzeste, die von einem Punkte nach einer geraden Linie gezogen werden kann.

Jede andere Linie steht dem rechten Winkel gegenüber, und ist daher die größte Seite des entstandenen Dreiecks.

5) Ist in einem Dreieck eine Seite eben so groß, oder größer als jede der beiden andern Seiten, so sind die beiden, anliegenden Winkel nothwendig spitz.

Wollte man annehmen, es wäre einer der anliegenden Winkel stumpf, oder $= R$, so würde diesem Winkel die größeste Seite gegenüberliegen, was jedoch gegen die Voraussetzung ist.

6) Jede, zwischen 2 Punkten A und E (Fig. 10) gezogene, gebrochene Linie ABCDE ist größer, als die gerade Linie AE. (Die gerade Linie ist daher die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten).

Beweis. Es ist $AB + BC > AC$ (§. 37).
$AC + CD > AD$ und
$AD + DE > AE$.

Addirt man diese Ungleichungen und subtrahirt auf beiden Seiten AC + AD, so bleibt:

$$AB + BC + CD + DE > AE \text{ oder:}$$
$$ABCDE > AE.$$

B. Von der Congruenz der Dreiecke.

§. 39. Um die Congruenz zweier Dreiecke festzustellen, ist es nicht nöthig, daß man untersucht, ob alle Seiten und Winkel des einen Dreiecks beziehlich den Seiten und Winkeln des andern Dreiecks gleich sind, sondern es genügen hierzu im Allgemeinen drei gleiche Stücke, mit alleiniger Ausnahme der drei Winkel. Die speciellen Fälle, in welchen die Congruenz zweier Dreiecke aus drei gleichen Stücken folgt, sprechen sich in nachstehenden Lehrsätzen aus.

§. 40. Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie einen gleichen Winkel haben und die diesen Winkel einschließenden Seiten beziehlich in dem einen Dreieck so groß als in dem andern sind.

Voraus.: $\mathfrak{W}.\ A = \mathfrak{W}.\ a$ (Fig. 11).
$AB = ab$
$AC = ac$

Behaupt.: $\Delta ABC \cong \Delta\ abc.$

Beweis. Man lege das Dreieck abc so auf das Dreieck ABC, daß die Seiten ab und AB mit ihren Endpunkten auf einander fallen. Alsdann wird auch der W. a den W. A, so wie die Seite ac die Seite AC vollständig decken, weil diese Stücke als gleich gegeben sind. Es liegen daher die beiden Dreiecke mit ihren Ecken und Seiten auf einander, d. h. sie sind congruent.

§. 41. Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite und die beiden dieser Seite anliegenden Winkel in dem einen Dreieck beziehlich so groß, als in dem andern sind.

Voraus.: $AB = ab$ (Fig. 11).
$\mathfrak{W}.\ A = \mathfrak{W}.\ a$
$\mathfrak{W}.\ B = \mathfrak{W}.\ b$

Behaupt: $\Delta ABC \cong \Delta\ abc.$

Beweis. Man lege das Dreieck abc so auf das Dreieck ABC, daß die Seiten ab und AB mit ihren Endpunkten auf

einander fallen. Alsdann werden auch die Seiten ac und bc auf die Seiten AC und BC, wegen Gleichheit der Winkel, fallen und ihr Durchschnittspunkt kann, weil sie auf AC und BC liegen, kein anderer sein als C. Mithin fallen die Dreiecke in ihren Ecken auf einander, d. h. sie sind congruent.

§. 42. **Lehrsatz.** Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in beiden eine Seite und zwei Winkel, wovon einer an dieser Seite liegt der andere aber derselben gegenüber, beziehlich gleiche Größe haben.

Voraussetzung: $AC = ac$ (Fig. 11).
$\mathfrak{W}.\ A = \mathfrak{W}.\ a$
$\mathfrak{W}.\ B = \mathfrak{W}.\ b$

Behauptung: $\Delta.\ ABC \cong \Delta\ abc$.

Beweis. Da die drei Winkel eines Dreiecks $= 2R$ sind, so ist $\mathfrak{W}.\ C = 2R - (\mathfrak{W}.\ A + \mathfrak{W}.\ B) = 2R - (\mathfrak{W}.\ a + \mathfrak{W}.\ b) = \mathfrak{W}.\ c$. Es sind daher auch die beiden andern anliegenden Winkel, nämlich C und c, einander gleich, und mithin die Dreiecke nach §. 41. $\cong$.

§. 43. **Lehrsatz.** Zwei Dreiecke sind congruent, wenn 2 Seiten in dem einen beziehlich so groß als 2 Seiten in dem andern sind, und von ihren Gegenwinkeln das eine homologe *) Paar einander gleich, das andere aber zusammen $\gtrless 2R$ ist.

Voraussetzung: $AB = ab$ (Fig. 11).
$AC = ac$
$\mathfrak{W}.\ B = \mathfrak{W}.\ b$
$\mathfrak{W}.\ C + \mathfrak{W}.\ c \gtrless 2R$.

Behauptung: $\mathfrak{W}.\ ABC \cong \mathfrak{W}.\ abc$.

Beweis. Legt man das Dreieck abc so auf das Dreieck ABC, daß die gleichen Seiten ab und AB mit ihren Endpunkten zusammenfallen, so wird auch, weil $\mathfrak{W}.\ b = \mathfrak{W}.\ B$ ist, die Seite bc auf BC zu liegen kommen. Fiele nun auch der Punkt c auf C, so wären die Dreiecke, nach §. 40, congruent. Um nun darzuthun, daß c auf C fallen muß, schließe man wie folgt:

*) In congruenten Dreiecken nennt man die Winkel und Seiten, welche gleichen Seiten und Winkeln gegenüber liegen, homologe oder gleichliegende Winkel und Seiten.

Angenommen der Punkt c fiele nicht auf C, so kann derselbe nur zwischen C und B, etwa nach c′, oder in die Verlängerung von CB, etwa nach c″ fallen. Im ersteren Falle wäre Dreieck ABc′ ≅ Dreieck abc und mithin auch

$$\text{W. Ac'B} = \text{W. acb},$$ so wie $\text{Ac'} = \text{ac}$.

Nach der Voraussetzung ist aber auch $\text{AC} = \text{ac}$, mithin wäre $\text{AC} = \text{Ac'}$, d. h. Dreieck ACc′ gleichschenklig. Man hätte also: $\text{W. ACc'} = \text{W. Ac'C}$

$\text{W. Ac'B} + \text{W. Ac'C} = 2\,\text{R}$ folglich auch:

$\text{W. acb} + \text{W. Ac'C} = \text{W. acb} + \text{W. ABC} = 2\,\text{R}$, was jedoch der Voraussetzung widerspricht.

Auf denselben Widerspruch stößt man aber auch bei der Annahme c fiele nach c″; mithin kann c nur auf C fallen, d. h. die Dreiecke sind ≅.

§. 44. Folgesatz. Dreiecke sind congruent, wenn sie beziehlich 2 Seiten gleich haben, und der Gegenwinkel, welcher der größern von diesen Seiten gegenüber liegt, in dem einem Dreieck so groß als in dem andern ist.

Voraus.: $\text{AB} = \text{ab}$ (Fig. 11).

$\text{AC} = \text{ac}$

$\text{W. ACB} = \text{W. acb}$

und $\text{AB} > \text{AC}$, so wie $\text{ab} > \text{ac}$

Behaupt.: $\Delta\,\text{ABC} \cong \Delta\,\text{abc}$.

Beweis. Wenn $\text{AB} > \text{AC}$, so wie $\text{ab} > \text{ac}$, so ist auch $\text{W. ACB} > \text{W. ABC}$ und $\text{W. acb} > \text{W. abc}$ (§. 34), mithin müssen die Winkel ABC und abc nach §. 32. 2 nothwendig spitz und deren Summe $< 2\,\text{R}$ sein; folglich finden hier dieselben Voraussetzungen statt wie im §. 43, weshalb $\Delta\,\text{ABC} \cong \Delta\,\text{abc}$.

§. 45. Zusatz. Zwei Dreiecke, bei welchen die Bedingungen des §. 43, mit Ausnahme der 4ten:

„$\text{W. C} + \text{W. c} \gtrless 2\,\text{R}$“, stattfinden, können sich nur in dem Falle decken, wenn die Dreiecke rechtwinklig sind. Sind aber die Dreiecke nicht rechtwinklig, und von ihnen zwei Seiten und ein Paar Gegenwinkel als gleich gegeben, so lassen sich stets zwei Dreiecke construiren, welche dieselben Stücke enthalten ohne congruent zu sein. Fällt man z. B. im Dreieck AEB (Fig. 12) auf die Seite BE die Normale AC,

und schneidet man von C aus, CF = CE ab, so entstehen die Dreiecke AFB und AEB, welche zwei Paare gleiche Seiten, nämlich AB = AB und AE = AF, so wie einen und denselben Gegenwinkel B haben. In diesen Dreiecken ist aber die Summe der beiden andern Gegenwinkel: W. E + W. F = 2R, weshalb die Dreiecke nicht congruent sind. Man hat nämlich:

CE = CF
AC = AC
W. ACE = W. ACF = R

Δ ACE $\cong$ Δ ACF. §. 40.

Aus dieser Congruenz folgt aber AF = AE und

W. AFB + W. AFE = W. AFB + W. AEB = 2R.

§. 46. **Lehrsatz.** Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen die drei Seiten beziehlich einander gleich sind.

Voraussetzung: AC = ac (Fig. 13).
AB = ab
BC = bc

Behauptung: Δ ABC $\cong$ Δ abc.

Beweis. Man lege das Dreieck abc mit einer Seite an die beziehlich gleiche Seite des Dreiecks ABC, und zwar:

1) mit der größten Seite ab an die gleiche Seite AB, so erhält das Dreieck abc die Lage a′b′c′. Verbindet man nun die Winkelspitze C mit c′, so ist:

W. ACc′ = W. a′c′C
und W. BCc′ = W. b′c′C } §. 33.

mithin W. ACc′ + W. BCc′ = W. a′c′C + W. b′c′C
d. i. W. ACB = W. a′c′b′ und da AC = a′c′ und CB = c′b′ gegeben, so ist auch Dreieck a′c′b′ $\cong$ Dreieck ABC. §. 40.

2) Legt man die beiden Dreiecke mit den gleichen kleineren Seiten, etwa mit ac und AC, an einander, so erhält das Dreieck abc die Lage a′b″c″, und verbindet man nun die Winkelspitzen b″ und B durch eine gerade Linie, so sind die Dreiecke a′b″B und b″c″B gleichschenklig, daher:

W. a′b″B = W. a′Bb″
W. c″b″B = W. c″Bb″

W. a′b″B − W. c″b″B = W. a′Bb″ − W. c″Bb″
d. i. W. a′b″c″ = W. ABC
folglich Dreieck abc $\cong$ Dreieck ABC. §. 40.

§. 47. Zusatz. Rechtwinklige Dreiecke sind congruent:

1) Wenn sie beziehlich zwei gleiche homolog liegende Seiten haben.

Sind beide Katheten gleich, so folgt die Congruenz aus §. 40, und sind die Hypotenusen und ein Paar homologe Katheten gleich, so sind die Dreiecke nach §. 44 congruent.

2) Wenn sie ein Paar homolog liegende Katheten und einen der Hypotenuse anliegenden Winkel beziehlich gleich haben. (§. 41 und 42.)

§. 48. Folgesätze.

1) Die Linie, welche den von den gleichen Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks eingeschlossenen Winkel halbirt, halbirt auch die gegenüber liegende Seite, und steht auf ihr normal.

Die entstandenen Dreiecke (Fig. 14) sind nach §. 40. congruent, und hieraus folgt das Behauptete unmittelbar.

2) Die Normale auf die dritte Seite eines gleichschenkligen Dreiecks, aus der ihr gegenüberliegenden Ecke gefällt, halbirt den Winkel an dieser Ecke und auch die dritte Seite.

Die entstandenen Dreiecke sind nach §. 47. 1 congruent, woraus wiederum das Behauptete folgt.

3) Halbirt man die dritte Seite eines gleichschenkligen Dreiecks, und verbindet man den Halbirungspunkt mit der gegenüber liegenden Ecke, so steht die Halbirungslinie auf der dritten Seite normal und halbirt den gegenüber liegenden Winkel.

Es entstehen zwei congruente Dreiecke §. 46., aus welchen das Behauptete folgt.

4) Wenn die Linie, welche einen Winkel im Dreieck halbirt, die Mitte der gegenüber liegenden Seite trifft, so steht sie auf dieser normal und die beiden andern Seiten des Dreiecks sind einander gleich.

Nach §. 43. sind die Dreiecke, welche durch die Halbirungslinie entstehen, einander congruent, woraus das Behauptete folgt.

5) Wenn die auf der Mitte einer der 3 Seiten eines Dreiecks errichtete Senkrechte, die gegenüber liegende Ecke trifft, so halbirt sie auch den Winkel daselbst, und die ihn einschließenden Seiten sind einander gleich (§. 47.).

6) Wenn die Halbirungslinie eines Dreiecks-Winkels die gegenüber liegende Seite normal trifft, so halbirt sie auch dieselbe, und das Dreieck ist gleichschenklig (§. 47.).

7) Die Normale, auf der Mitte der dritten Seite eines gleichschenkligen Dreiecks errichtet, muß gehörig verlängert die gegenüber liegende Ecke treffen.

Beweis. Träfe die Normale DE (Fig. 14) nicht mit DC zusammen, so wäre nach Nr. 3 dieses §. W. CDA und auch W. EDA = R, mithin der Theil dem Ganzen gleich, aus welchem Widerspruch folgt, daß DE mit DC zusammenfallen muß.

8) Jeder Punkt o der Halbirunglinie CD eines Winkels ACB (Fig. 14) ist von seinen beiden Schenkeln gleich weit entfernt.

Es ist Δ omC $\cong \Delta$ onC. §. 47. daher auch om = on.

9) Errichtet man in den Halbirungspunkten zweier Seiten eines Dreiecks Normalen, so schneiden sich dieselben, und ihr Durchschnittspunkt ist von allen Ecken des Dreiecks gleich weit entfernt.

Voraussf.: CG = GB und AF = FB (Fig. 15).
EG $\perp$ CB und EF $\perp$ AB.

Behaupt.: AE = CE = BE.

Beweis. FE und GE schneiden sich, weil
W. EFG + W. EGF $<$ 2 R.
Δ CEG $\cong \Delta$ EGB (§. 47).
CE = BE
Δ AEF $\cong \Delta$ EFB (§. 47).
AE = BE
AE = BE = CE.

10) Denkt man sich zwei Winkel eines Dreiecks halbirt, so schneiden sich die Halbirungslinien, und ihr Durchschnittspunkt ist von allen Seiten des Dreiecks gleich weit entfernt.

Voraussf.: W. m = W. n (Fig. 16).
W. p = W. q

Behaupt.: EH = EF = EG.

Beweis. Aus Δ CHE $\cong \Delta$ CEG und Δ EFB $\cong \Delta$ EGB folgt EH = EG und EF = EG, und hieraus wiederum EH = EG = EF.

§. 49. Aufgaben. *)

1) Man soll aus 3 gegebenen Linien c, b und a (Fig. 17) ein Dreieck construiren.

Auflösung: Man trage auf einer beliebigen Länge MN eine der gegebenen Linien, z. B. c = AB ab, nehme die Linie b in den Zirkel und schlage mit dieser Zirkelöffnung von A aus einen Kreisbogen, und sodann von B, mit der Zirkelöffnung a, einen zweiten Kreisbogen, welcher den ersten in C schneiden wird. Verbindet man hierauf den Punkt C mit A und B durch gerade Linien, so ist das Dreieck ABC das verlangte; denn es enthält die gegebenen Linien als Seiten.

Bemerkung: Die Auflösung wird unmöglich, wenn die Summe zweier gegebenen Linien < als die dritte Linie sein sollte. (§. 37.) In diesem Falle schneiden sich die Kreisbogen nicht.

2) Man soll an den Punkt A einer gegebenen Linie AB einen Winkel zeichnen, der einem gegebenen Winkel α = ist (Fig. 18).

Auflösung: Man trage auf den Schenkeln des Winkels α gleiche Stücke ac und ab, so wie die Seite ab des entstandenen Dreiecks abc von A aus auf AB ab, so daß Ab′ = ab wird, und construire demnächst nach Nr. 1 über Ab′ das Δ Ab′c′. Alsdann ist Δ Ab′c′ ≅ Δ abc (§. 46.) und W. c′Ab′ = W. α.

3) Aus einem Winkel und zwei geraden Linien, welche den gegebenen Winkel einschließen sollen, ein Dreieck zu verzeichnen.

Auflösung: Man trage auf den Schenkeln des gegebenen Winkels, von dessen Scheitelpunkt aus, die gegebenen Linien ab, und verbinde die beiden Endpunkte derselben durch eine gerade Linie. Das entstandene Dreieck ist das verlangte. (§. 40.)

4) Aus zwei Seiten und einem Winkel, welcher der größern von diesen Seiten gegenüber liegen soll, ein Dreieck zu construiren.

Auflösung: Man trage auf einem Schenkel des gegebenen Winkels C (Fig. 19) die kleinere Seite CB ab und schneide, die Zirkelspitze in den Punkt B einsetzend, den andern Schenkel des gegebenen Winkels mit der gegebenen größeren Seite AB.

---

*) Die Auflösung der geometrischen Aufgaben setzt den Gebrauch des Zirkels und Lineals voraus. Man muß daher wissen, wie eine gerade Linie mittelst des Lineals gezogen und vermöge des Zirkels auf einer andern geraden Linie abgetragen, und sodann, wie ein Kreisbogen mittelst des Zirkels gezeichnet werden kann.

5) Aus einer Seite a und zwei Winkeln x und y, die beide dieſer Seite anliegen, ein Dreieck opq (Fig. 20) zu conſtruiren.

Auflöſung: Man ſchneide von der Linie mn ein der gegebenen Seite a gleiches Stück op ab, trage im Punkt o den W. x und in p den W. y an die Linie mn an, und verlängere die Schenkel, bis ſie ſich in q ſchneiden. Das ſo entſtandene Dreieck opq iſt das verlangte, weil

$$op = a$$
$$W.\ o = W.\ x$$
$$W.\ p = W.\ y.$$

6) Aus einer Seite a und den Winkeln n und m (Fig. 21.), von denen einer dieſer Seite an- der andere ihr aber gegenüber liegt, ein Dreieck zu conſtruiren.

Auflöſung: Man trage an die beliebige Linie ab im Punkt A den W. m und neben dieſen den W. n an, ſchneide hierauf ein der Seite a gleiches Stück AB von Ab ab, und ziehe aus B eine Linie BC mit dem Schenkel AD des Winkels m parallel. Hierdurch entſteht das Dreieck ABC, welches die gegebenen Stücke enthält; denn es iſt:

$$AB = a$$
$$W.\ r = W.\ n \text{ als Wechſelwinkel}$$
$$W.\ s = W.\ m \text{ als Gegenwinkel.}$$

7) Man ſoll eine gerade Linie AB (Fig. 23) halbiren.

Auflöſung: Man beſchreibe aus A mit einer Zirkelöffnung größer als $\frac{1}{2}$ AB, oberhalb und unterhalb AB, Kreisbogen, ſchneide dieſe von B aus mit derſelben Zirkelöffnung und verbinde den obern Durchſchnittspunkt C mit dem untern D durch die gerade Linie CD. Die Linie CD theilt alsdann AB in zwei gleiche Theile; denn verbindet man die Punkte C und D mit A und B durch gerade Linien, ſo erhält man

$$\Delta\ ACD \cong \Delta\ BCD\ (\S.\ 46)$$
$$W.\ ACD = W.\ BCD$$
daher auch $\Delta\ AKC \cong \Delta\ BKC\ (\S.\ 40)$
$$AK = BK.$$

8) Man ſoll einen gegebenen Winkel, z. B. W. BAC (Fig. 22) halbiren.

Auflöſung: Man ſchneide von den Schenkeln des gegebenen Winkels die gleichen Stücke Ab und Ac ab, und beſchreibe aus b und c mit einer und derſelben Zirkelöffnung Kreisbogen, die ſich in D ſchneiden. Verbindet man hierauf D mit der Winkelſpitze A durch eine gerade Linie, ſo halbirt dieſe Linie den Winkel BAC; denn

Δ AbD $\cong$ Δ AcD (§. 46)
folglich: W. BAD = W. CAD

9) Man soll von C (Fig. 23) eine Normale auf die gerade Linie mn fällen.

Auflösung: Man schneide die Linie mn, von dem Punkte C aus, mit einer entsprechenden Zirkelöffnung in A und B. Halbirt man hierauf AB in K, so ist die Linie CK normal auf mn. Beweis. Δ ACK $\cong$ Δ BCK

W. AKC = W. BKC = R
CK $\perp$ mn.

10) Man soll aus Punkt K in der geraden Linie mn (Fig. 23) eine Senkrechte errichten.

Auflösung: Man schneide auf der Linie mn, zu beiden Seiten des Punktes K, gleiche Stücke KA und KB ab, schlage aus A und B mit einer und derselben Zirkelöffnung zwei sich in C schneidende Kreisbogen, und verbinde demnächst K mit C. Die Linie CK ist die verlangte Senkrechte.

11) Man soll auf dem Endpunkt A der geraden Linie AB (Fig. 24), welche sich über diesen Punkt hinaus nicht verlängern läßt, eine Senkrechte errichten.

Auflösung: Man construire über AB das gleichschenklige Dreieck ABC, verlängere BC über C um CF = AC, und verbinde A mit F, so ist AF die verlangte Senkrechte; denn

$$\left.\begin{array}{l} x = y \\ n = m \end{array}\right\} \text{(§. 33)}$$

$$x + n = y + m.$$

Nach §. 31 ist aber: $(x + n) + (y + m) = 2R$
daher auch $2(x + n) = 2R$
$x + n = R$
folglich: AF $\perp$ AB.

12) Man soll einen rechten Winkel (ABC Fig. 25) in 3 gleiche Theile theilen.

Auflösung: Man nehme in dem Schenkel BC einen beliebigen Punkt D an, beschreibe über BD das gleichseitige Dreieck BDE und halbire den W. EBD. Alsdann ist $o = r = v$; denn $o + r + v = R$ und $v = R - (o + r) = R - \frac{2}{3}R = \frac{1}{3}R$, folglich $o = v = r = \frac{1}{3}R$.

13) Man soll durch den Punkt C (Fig. 26) zu AB eine parallele Linie ziehen.

Auflösung: Man nehme in AB einen beliebigen Punkt D an, verbinde denselben mit C, halbire CD in E, ziehe von A oder von irgend einem andern Punkt der Linie AB durch

E eine Gerade, verlängere AE über E hinaus, und mache die Verlängerung EF = AE.

Alsdann ist: CF ∥ AB, denn

$\Delta ADE \cong \Delta ECF$. (§. 40)

W. F = W. A.

14) Es soll dargethan werden, auf welche Weise der Richtungswinkel eines Geschützes mittelst des Quadranten bestimmt werden kann.

Auflösung: Man stelle den Quadranten Q auf eine Linie cb am Geschütz (Fig. 13), welche mit der Seelenaxe parallel läuft, so ist, wenn ab die horizontale Richtung angiebt, der Richtungswinkel abc = dem W. α, dessen Maß der Pendel des Quadranten auf der Bogeneintheilung anzeigt.

Beweis. Denkt man sich die Richtung des Pendels ke verlängert, so trifft dieselbe die wagerechte Linie ab normal; mithin sind die Dreiecke bde und fek rechtwinklig (W. kfe = R vermöge der Einrichtung des Quadranten). Alsdann ist aber:

$\alpha + n = o + abc$

$n = o$ subt.

W. α = W. abc.

Drittes Kapitel.

Von den vierseitigen Figuren, so wie von den Bedingungen der Gleichheit bei nicht congruenten Parallelogrammen und Dreiecken. — Aufgaben, die Theilung der geradlinigen Figuren betreffend.

§. 50. Erklärungen.

Die vierseitigen Figuren (Vierecke) theilt man ein, in: Parallelogramme (∥gr), Trapeze und Trapezoide.

Ein Parallelogramm ist eine vierseitige Figur, in welcher je zwei gegenüberliegende Seiten mit einander ∥ laufen. Ein Viereck wird ein Trapez genannt, wenn es nur zwei parallele Seiten hat, und dagegen ein Trapezoid, wenn keine Seite desselben mit einer andern parallel läuft.

Die Parallelogramme theilt man wiederum ein, in: schiefwinklige, wenn sie lauter spitze und stumpfe Winkel, und in rechtwinklige oder Rechtecke, wenn sie lauter rechte Winkel haben.

Ein schiefwinkliges ∥gr. heißt Rhombus oder Raute, wenn in demselben die Seiten einander gleich sind, und Rhomboid (längliche Raute), wenn nur die gegenüberliegenden Seiten einander gleich sind.

Ein Rechteck (Oblongum) wird ein Quadrat genannt, sobald die Seiten desselben einander gleich sind.

Die Eintheilung dieser vierseitigen Figuren und ihre entsprechende Bezeichnungsart ist in Fig. 27 übersichtlich zusammengestellt.

Die normalen Abstände der parallelen Seiten eines ∥grs werden die Höhen, und die parallelen Seiten in Bezug auf diese Höhen, die Grundlinien des ∥grs genannt.

Rechtecke bezeichnet man auch durch das Product ihrer Grundlinie und Höhe, und Quadrate durch das Quadrat ihrer Seite. Hiernach bezeichnet AF . AD das Rechteck AFED und BC^2 das Quadrat über der Seite BC (Fig. 31). Bei dieser Bezeichnungsart hat man sich unter AF, AD und BC nicht die Linien selbst, sondern ihre Maße zu denken.

Enthält eine Figur 5, 6, 7 oder allgemein n Seiten, so wird dieselbe ein 5Eck, 6Eck, 7Eck oder nEck genannt. Figuren, welche mehr als 4 Seiten haben, nennt man auch Polygone.

Jede gerade Verbindungslinie zweier Ecken eines n Ecks, heißt eine Diagonale.

§. 51. Lehrsatz. In jedem Vierecke beträgt die Summe der innern Winkel 4 R.

Beweis. Man ziehe eine Diagonale, so entstehen 2 Dreiecke, deren Winkel die Summe der Winkel des Vierecks geben, nämlich: $2R + 2R = 4R$.

§. 52. Lehrsatz. Jedes ∥gr. wird durch eine Diagonale in zwei gleiche Dreiecke getheilt (Fig. 28).

Voraussf.: ABCD ein ∥gr.

Behaupt: $\Delta ACB = \Delta CBD$.

Beweis. $\Delta ACB \cong \Delta CBD$ (§. 41)

Congruente Figuren sind aber auch gleich, daher ist:

$\Delta ACB = \Delta CBD$.

§. 53. Lehrsatz. In jedem ∥gr. sind die gegenüberliegenden Seiten und Winkel einander gleich (Fig. 28).

Voraussetzung: ABCD ein ∥gr.

Behauptung: $AB = CD$; $AC = BD$

$\mathfrak{W}. A = \mathfrak{W}. D$; $\mathfrak{W}. B = \mathfrak{W}. C$.

Beweis. Da $\triangle ABC \cong \triangle BCD$, so ist auch

$AB = CD$ und $AC = BD$, so wie $\mathfrak{W}. A = \mathfrak{W}. D$

$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{W}. ACB = \mathfrak{W}. CBD \\ \mathfrak{W}. BCD = \mathfrak{W}. ABC\end{array}\right\}$ addirt giebt: $\mathfrak{W}. C = \mathfrak{W}. B$.

§. 54. Lehrsatz. Zwei ∥gramme sind $\cong$, wenn sie beziehlich einen gleichen Winkel haben und die denselben einschließenden Seiten, in dem einen so groß als in dem andern sind.

Voraussetzung: $AB = ab$ (Fig. 28)

$BD = bd$

$\mathfrak{W}. B = \mathfrak{W}. b$

Behaupt.: ∥gr. ABCD $\cong$ ∥gr. abcd.

Beweis. Man denke sich das ∥gr. abcd so auf das ∥gr. ABCD gelegt, daß der Punkt b auf B zu liegen kommt. Alsdann wird auch wegen der Gleichheit der Winkel b und B, so wie wegen Gleichheit der einschließenden Seiten a auf A und d auf D fallen.

Nun ist: $\mathfrak{W}. B + \mathfrak{W}. D = \mathfrak{W}. b + \mathfrak{W}. d = 2R$ §. 27.

$\mathfrak{W}. B = \mathfrak{W}. b$ subtrahirt

bleibt: $\mathfrak{W}. D = \mathfrak{W}. d$; daher fällt auch dc auf DC.

Ferner ist: $\mathfrak{W}. B + \mathfrak{W}. A = \mathfrak{W}. b + \mathfrak{W}. a$

$\mathfrak{W}. B = \mathfrak{W}. b$ subtrahirt

bleibt: $\mathfrak{W}. A = \mathfrak{W}. a$.

Es fallen also auch die Seiten ac und AC auf einander; mithin decken sich die ∥gramme.

§. 55. Folgesatz. Rechtecke sind $\cong$, wenn in ihnen zwei zusammenstoßende Seiten gleich sind, Rauten, wenn sie eine Seite und einen Winkel von gleicher Größe haben, und Quadrate, wenn die Seite des einen so groß als die Seite des andern ist.

In den Rechtecken und Quadraten sind die Winkel, und in Rauten und Quadraten die Seiten einander gleich; mithin sind auch diese Figuren bei den gegebenen gleichen Stücken, nach §. 54 congruent.

§. 56. Erklärung. Zieht man durch einen beliebi-

gen Punkt O der Diagonale AC eines ∥grs. ABCD (Fig. 29) mit je zwei parallelen Seiten Parallelen, so entstehen vier ∥gramme, von welchen die beiden, durch welche die Diagonale nicht geht, die Ergänzungs-Parallelogramme an der Diagonale genannt werden. Hiernach sind DEOG und HOFB Ergänzungs-Parallelogramme an der Diagonale AC.

§. 57. Lehrsatz. Die Ergänzungs-Parallelogramme an der Diagonale eines ∥grs. sind einander gleich (Fig. 29).

Behaupt.: ∥gr. DEOG = ∥gr. HOFB.

Beweis. $\left.\begin{array}{l} \Delta ADC \cong \Delta ABC \\ \Delta I \cong \Delta I' \\ \Delta II \cong \Delta II' \end{array}\right\}$ (§. 46).

daher $\Delta ADC - (\Delta I + \Delta II) = \Delta ABC - (\Delta I' + \Delta II')$

d. i. ∥gr. DEOG = ∥gr. HOFB.

§. 58. Lehrsatz. Zwei Parallelogramme ABCD und abcd (Fig. 30) sind einander gleich, wenn sie gleiche Grundlinien und Höhen haben.

Voraussf.: AB = ab

h = h'

Beweis. Legt man das ∥gr. abcd auf das ∥gr. ABCD, so daß sich die gleichen Grundlinien ab und AB in ihren Endpunkten decken, so muß auch die andere Grundlinie dc in die Richtung von DC fallen, weil die Höhen beider ∥gramme einander gleich sind. Hierbei kann jedoch der Punkt d, nach Beschaffenheit der Winkel A und a, zwischen D und C, oder auf den Punkt C, oder auch in die Verlängerung von DC fallen.

1) Fällt der Punkt d zwischen D und C nach d' (Fig. 30. I.), so daß ∥gr. a'b'c'd' = ∥gr. abcd, so ist:

$\Delta ADd' \cong \Delta BCc'$

$\Delta ADd' = \Delta BCc'$

$Ad'CB + \Delta ADd' = Ad'CB + \Delta BCc'$

d. i. ∥gr. ABCD = ∥gr. a'b'c'd' = ∥gr. abcd.

2) Fällt d auf den Punkt C nach d' (Fig. 30. II), so ist:

$\Delta ACD \cong \Delta b'c'd'$ (§. 46 und 53)

daher: $\Delta ABC + \Delta ADC = \Delta a'b'd' + \Delta b'd'c'$

d. i ∥gr. ABCD = ∥gr. a'b'c'd' = ∥gr. abcd.

3) Fällt d in die Verlängerung von DC nach d' (Fig. 30 III.), so ist:

$\Delta ADd' \cong \Delta BCc'$ (§. 41, 42, 46.)

folglich auch: $\Delta ADd' - \Delta ECd' + \Delta ABE = \Delta BCc' - \Delta ECd' + \Delta ABE$
d. i. ∥gr. ABCD = ∥gr. a'b'c'd' = ∥gr. abcd.

§. 59. Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind einander gleich, wenn sie gleiche Grundlinien und Höhen haben (Fig. 28).

Voraus.: $AB = ab$ und $h = h'$

Behaupt: $\Delta ABC = \Delta abc$.

Beweis: Zieht man $CD \parallel AB$ und $BD \parallel AC$, so wie $cd \parallel ab$ und $bd \parallel ac$, so entstehen die Parallelogramme ABCD und abcd. (§. 50). Nach §. 52 ist aber:

∥gr. ABCD = 2.Δ ABC.
∥gr. abcd = 2.Δabc, und nach §. 58.
∥gr. ABCD = ∥gr. abcd, mithin auch
2.Δ ABC = 2.Δ abc, durch 2 dividirt
Δ ABC = Δ abc.

§. 60. Lehrsatz. Ein Dreieck ist die Hälfte von einem ∥gr., mit dem es gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Voraus.: $AB = AB$ und $h = h$ (Fig. 28).

Behaupt.: $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ ∥gr. ABCD.

Beweis. $\Delta ABC = \Delta BCD$ (§. 52)
$2\,\Delta ABC =$ ∥gr. ABCD, dividirt durch 2, giebt
$\Delta ABC = \frac{1}{2}$ ∥gr. ABCD.

§. 61. Folgesätze.

1) Dreiecke oder Parallelogramme, welche gleiche Grundlinien haben und zwischen einerlei Parallelen liegen, sind einander gleich.

Beweis. Liegen die Dreiecke oder ∥gre. zwischen einerlei Parallelen, so haben sie auch gleiche Höhen, da parallele Linien überall gleichweit von einander abstehen.

2) Stehen zwei gleiche Dreiecke oder ∥gramme auf einer und derselben Grundlinie, so liegen ihre Spitzen oder zweiten Grundlinien in einer und derselben Parallele.

Beweis. Angenommen ihre Spitzen oder zweiten Grundlinien lägen nicht in einer und derselben Parallele, so hätten sie auch verschiedene Höhen, und die Dreiecke oder ∥gramme wären nach §. 58 und §. 59 nicht gleich. Dies ist jedoch gegen die Voraussetzung, und es kann daher die Annahme: „die Spitzen oder zweiten Grundlinien lägen nicht in einer und derselben Parallele," nicht stattfinden.

Bemerkung. Dieser Satz giebt uns ein zweites Mittel an die Hand, durch einen Punkt eine Linie parallel zu einer

andern auf dem Felde zu ziehen. Man construire nämlich über der gegebenen Linie zwei gleiche Dreiecke nach §. 59, von welchen die Spitze des einen auf den gegebenen Punkt fällt. Die Verbindungslinie beider Dreieckspitzen giebt die gesuchte Parallele.

§. 62. **Lehrsatz.** In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Voraussetzung: $\Delta ABC = R$. (Fig 31)

Behauptung: $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Beweis. Zieht man $BE \parallel AF$ und die Linien NC und FB so ist:

$\Delta ACN \cong \Delta AFB$; denn $m + n = o + n$

$AN = AB$

$AC = AF$

$\Delta ACN = \Delta AFB$

aber auch: $\Delta ACN = \frac{1}{2} ABMN$ (§. 60)

$\Delta AFB = \frac{1}{2} AFED$.

Verbindet man ferner A mit P und B mit G durch gerade Linien, so erhält man Dreiecke, von deren Gleichheit sich auf die Gleichheit des Rechtecks DEGC und des Quadrats BCPL schließen läßt, und man findet:

$ABMN = AFED$ } beide Gleichungen addirt

$BCPL = DEGC$ } giebt:

$ABMN + BCPL = ACGF$

$AB^2 + BC^2 = AC^2$.

§. 63. **Zusatz.** Aus dem vorigen Lehrsatz folgt umgekehrt: Wenn das Quadrat einer Seite eines Dreiecks gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten ist, so steht der erstern Seite ein rechter Winkel gegenüber.

So z. B. giebt es ein Dreieck, dessen Seiten 5', 4' und 3' messen, und in diesem Falle ist:

$5^2 = 4^2 + 3^2$

$25 = 16 + 9 = 25$; folglich das Dreieck rechtwinklig.

Die Maße 3, 4 und 5 benutzt man gewöhnlich, um im Felde einen rechten Winkel abzustecken. Eben so geben die Maße 5, 12 und 13, so wie 8, 15 und 17 u. dgl. m., auf irgend ein Längengemäß bezogen, rechtwinklige Dreiecke.

§. 64. **Aufgaben, die Verwandlung und Theilung der Figuren betreffend.**

Erklärung. Eine Figur verwandeln heißt eine andere Figur zeichnen, welche der gegebenen Figur an Flächeninhalt gleich ist.

1) Das Dreieck ABC (Fig. 32). soll in ein anderes, welches die Linie ab als Seite enthält, verwandelt werden.

Auflösung: Man ziehe durch die Spitze C des gegebenen Dreiecks die Linie MN ∥ AB, nehme die Linie ab in den Zirkel und schneide mit dieser Zirkelöffnung MN aus Punkt A, so ist Δ a'b'B das verlangte (§. 59).

Anmerkung. Die gegebene Seite ab muß > oder = der Höhe h des gegebenen Dreiecks ABC sein. Ist ab = h, so wird das Dreieck rechtwinklig.

2) Das Dreieck ABC (Fig. 32) soll in ein anderes Dreieck verwandelt werden, welches den W. α enthält.

Auflösung: Man ziehe MN ∥ AB und trage den gegebenen W. α im Punkt A an die Seite AB. Verlängert man hierauf den Schenkel des W. α, bis er die Linie MN in D schneidet, so ist Δ ABD das verlangte.

3) Man soll ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 32) in ein gleichschenkliges verwandeln.

Auflösung: Man ziehe MD ∥ AB, halbire die Grundlinie AB, und errichte im Halbirungspunkte E eine Normale EF. Alsdann ist Δ ABF gleichschenklig (§. 47. 1) und = Δ ABC.

4) Man soll Δ ABC (Fig. 33) in ein anderes mit gegebener Höhe verwandeln.

Auflösung: 1) Die gegebene Höhe ist größer als die Höhe des Dreiecks ABC.

Man errichte in A eine Normale AD = der gegebenen Höhe, ziehe DE ∥ AB und verlängere AC bis F. Zieht man hierauf CG ∥ FB und die gerade Linie GF, so ist Δ AGF das verlangte.

Beweis. Δ CGF = Δ CGB

daher AGC + CGF = AGC + CGB

d. i. Δ AGF = Δ ABC.

2) Die gegebene Höhe ist kleiner als die Höhe des Dreiecks ABC (Fig. 34).

Man errichte in A eine Normale AD = der gegebenen Höhe, ziehe DE ∥ AB, verbinde E mit B durch eine gerade Linie, ziehe CF ∥ EB und die Gerade EF, so ist Δ AFE das verlangte.

5) Man soll ein ∥gr. EDGO (Fig. 29) in ein anderes verwandeln, welches eine gegebene Linie ab als Seite enthält.

Auflösung: Man construire nach §. 56 zu ∥gr. EDGO das Ergänzungs-Parallelogramm an der Diagonale, welches die Länge ab als Seite enthält. Zu diesem Ende verlängere man EO, mache die Verlängerung OF = ab, ziehe

CB ∥ GO, verlängere DG bis C, verbinde C mit O durch eine Gerade, verlängere CO und DE bis A, ziehe AB ∥ DG und verlängere GO bis H. Alsdann ist ∥gr. OFBH das verlangte, denn es enthält die Seite OF = ab und ist = ∥gr. EDGO.

6) Man soll ein ∥gr. EDGO (Fig. 29) in ein anderes EOcd, welches einen gegebenen Winkel α enthält, verwandeln.

Auflösung: Man trage den gegebenen W. α an den Punkt E an und ziehe Oc ∥ Ed, so ist ∥gr. EOcd = ∥gr. EDGO (§. 61. 1).

7) Man soll ein beliebiges Dreieck in ein ∥gr. verwandeln, welches einen gegebenen Winkel und eine gegebene Seite enthält.

Auflösung: Man ergänze das gegebene Dreieck zu einem ∥gr., und verwandle dieses nach Aufgabe 5 und 6 in ein anderes, welches die gegebenen Stücke enthält. Halbirt man hierauf eine nicht gegebene Seite dieses ∥grs. und zieht durch den Halbirungspunkt eine Parallele mit der gegebenen Seite, so entstehen 2 ∥gramme, von denen jedes die gegebenen Stücke enthält und dem gegebenen Dreieck = ist.

8) Man soll die sechsseitige Figur ABCDEF (Fig. 35) in ein Dreieck verwandeln, dessen Spitze auf den Punkt C und dessen Grundlinie auf die Seite AF fällt.

Auflösung und Beweis: Man ziehe die Diagonale AC und BG ∥ AC, so ist, wenn C mit G verbunden wird:

$$\Delta ABC = \Delta AGC \text{ daher}$$
$$ACDEF + \Delta ABC = ACDEF + \Delta AGC.$$

Auf ähnliche Weise ist der eingehende Winkel bei E wegzuschaffen, indem man DF und demnächst ER ∥ DF zieht und D mit R verbindet. Alsdann ist:

$$\Delta ERD = \Delta ERF \quad (§.\ 61.\ 1.)$$
$$GCDEF = GCDR.$$

Verbindet man zuletzt C mit R durch eine Gerade und zieht DL ∥ CR; so wie die Linie CL, so wird:

$$\Delta CRD = \Delta CRL$$
$$GCDR = \Delta GCL.$$

9) Man soll ein beliebiges nEck in ein Dreieck verwandeln.

Auflösung: Man verwandle das gegebene nEck zunächst in ein (n—1)Eck, dieses in ein (n—2)Eck, und so fort bis man zuletzt das verlangte Δ erhält.

10) Man soll zwei Quadrate, deren Seiten x und y gegeben sind, in ein Quadrat verwandeln (Fig. 36).

Auflösung: Trägt man auf den Schenkeln eines rechten Winkels, vom Scheitelpunkt aus, die gegebenen Seiten ab, so ent-

steht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse s die Seite des gesuchten Quadrats ist.

Beweis. Es ist: $s^2 = d^2 + x^2$ (§. 62).

11) Es sind die Seiten a, b, c, d u. s. w. mehrerer Quadrate gegeben; man soll die Seite eines Quadrats finden, welches der Summe der gegebenen Quadrate gleich ist.

Auflösung: Trägt man a und b auf den Schenkeln eines rechten Winkels ab, so ist das Quadrat über der zugehörigen Hypotenuse: $s^2 = a^2 + b^2$. Errichtet man nun auf einem Endpunkte von s eine Normale = c, so ist, wenn man die Hypotenuse S zieht: $S^2 = c^2 + s^2 = c^2 + a^2 + b^2$ u. s. w.

12) Man soll ein Quadrat beschreiben, welches 2mal so groß als ein gegebenes ist.

Auflösung: Man trage auf jedem Schenkel eines rechten Winkels die Seite a des gegebenen Quadrats ab, so ist das Quadrat über der Hypotenuse des entstandenen rechtwinkligen Dreiecks $= a^2 + a^2 = 2a^2$.

13) Man soll ein Quadrat construiren, welches der Differenz zweier Quadrate $AB^2 - BC^2 =$ ist (Fig. 36).

Auflösung: Man mache den Schenkel BC des rechten Winkels BCA = der Seite des kleineren Quadrats, und schneide aus Punkt B mit der Seite des größeren Quadrats (BA) die andere Kathete AC. Alsdann entsteht das rechtwinklige Dreieck ABC, in welchem die Kathete AC die Seite des gesuchten Quadrats ist, denn:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$
$$AB^2 - BC^2 = AC^2.$$

14) Man soll ein Dreieck in n gleiche Theile theilen.

Auflösung. Man theile irgend eine Seite in n gleiche Theile, und verbinde jeden Theilpunkt mit der gegenüber liegenden Ecke. Hierdurch erhält man n gleiche Dreiecke. (§. 59).

15) Es soll ein ⧾gr. in n gleiche Theile getheilt werden. — Man bilde ⧾gre. von gleicher Grundlinie und Höhe (§. 58).

Viertes Kapitel.

Vom Kreise und den regulären Polygonen.

§. 65. Erklärungen.

Ein Polygon wird regulär genannt, sobald dessen Seiten

und innere Umfangswinkel (Polygonwinkel) alle einander gleich sind. Ist dies nicht der Fall, so heißt das Polygon irregulär.

Existirt in der Fläche eines n Ecks ein Punkt, der von allen Seiten desselben gleich weit entfernt ist, so wird derselbe der Mittelpunkt des n Ecks genannt.

Bewegt man eine gerade Linie AC (Fig. 37) um einen ihrer Endpunkte C in einer und derselben Ebene, so beschreibt der andere Endpunkt A eine krumme Linie (Kreislinie), welche von C überall gleich weit absteht. — Die von dieser Linie eingeschlossene Fläche wird eine Kreisfläche, oder kurzweg ein Kreis genannt.

Die Kreislinie AMBD wird auch der Umfang oder die Peripherie des Kreises, jedes Stück derselben, z. B. AD, ein Bogen und jede gerade, vom Mittelpunkt C (Centrum) nach der Peripherie gezogene, Verbindungslinie CA ein Halbmesser oder Radius, so wie jede gerade, durch den Mittelpunkt gehende, Verbindungslinie zweier Punkte A und B in der Peripherie, ein Durchmesser des Kreises genannt.

Bringt man eine gerade Linie mit einem Kreis in Verbindung, so können folgende Fälle eintreten:

1) Die gerade Linie BE berührt die Peripherie in einem Punkte, in welchem Falle dieselbe eine Tangente des Kreises genannt wird.
2) Die gerade Linie OB schneidet die Peripherie in zwei Punkten, in welchem Falle dieselbe eine Sekante des Kreises genannt wird.

Jede gerade Verbindungslinie BD zweier Punkte in der Peripherie, welche nicht durch den Mittelpunkt geht, heißt eine Sehne oder Chorde des Kreises.

Jeder mit seinem Scheitelpunkte in der Peripherie des Kreises liegende und von zwei Sehnen gebildete Winkel, z. B. W. ABD, heißt ein Peripheriewinkel, und jeder von zwei Radien gebildete Winkel (W. BCD), ein Centri- oder Mittelpunktswinkel.

Der Theil des Kreises, welcher von einer Sehne und

dem ihr zugehörigen Bogen begrenzt wird, heißt ein Kreisabſchnitt oder Segment (DKBD), dagegen der Theil, welcher von zwei Radien und dem dazwiſchen liegenden Bogen eingeſchloſſen iſt, ein Kreisausſchnitt oder Sector (DCBK).

Ein Abſchnitt wird ein Halbkreis genannt, wenn die begrenzende Sehne ein Durchmeſſer iſt, und ein Ausſchnitt Quadrant, wenn ſein Bogen den vierten Theil der Kreislinie bildet. Der Bogen des Quadranten wird in 90 gleiche Theile (Bogengrade) getheilt.

Zwei Kreiſe werden concentriſch genannt, wenn ſie einen gemeinſchaftlichen Mittelpunkt haben, und dagegen excentriſch, wenn zwar ihre Flächen, aber nicht ihre Mittelpunkte auf einander fallen.

In und um jedes reguläre Polygon läßt ſich ein Kreis beſchreiben.

Man kann jeden Kreis als ein Polygon von unendlich vielen Seiten betrachten.

§. 66. Lehrſatz. Der Winkel, welchen eine Tangente mit dem Radius in ihrem Berührungspunkte bildet, iſt $= 2$ R. (W. CBE $=$ R. Fig. 37).

Beweis. Wäre CB nicht normal BE, ſondern etwa CE normal BE, ſo müßte auch CB $>$ CE ſein (§. 38. 2). Nun ſind aber die Radien eines Kreiſes einander gleich, mithin wäre auch CK $>$ CE, welcher Widerſpruch zeigt, daß CE ſo wie jede andere Linie die man von C nach der Tangente zieht, nicht normal auf BE ſtehen kann. Mithin bleibt nur zuläſſig: CB normal BE d. h. W. CBE $=$ R.

§. 67. Lehrſätze.

1) Zieht man einen Radius CH normal auf eine Sehne BD (Fig. 37), ſo halbirt er die letztere.

Δ CDF $\cong \Delta$ CBF (§. 47. 1).

2) Halbirt man eine Sehne DB in F (Fig. 37), ſo ſteht der durch den Halbirungspunkt F gelegte Radius ſenkrecht auf ihr (§. 46).

3) Errichtet man aus dem Halbirungspunkt F einer Sehne BD eine Normale FC, ſo fällt dieſelbe mit dem Radius zuſammen und geht daher durch den Mittelpunkt des Kreiſes.

Da jeder durch den Halbirungspunkt einer Sehne gezogene Radius auf letzterer senkrecht steht (Nr. 2), und von einem Punkt in einer geraden Linie nur eine Senkrechte errichtet werden kann, so fällt auch FC mit dem Radius zusammen und geht daher durch den Mittelpunkt des Kreises.

§. 68. Lehrsatz. Schneiden sich zwei Tangenten (BN und MN Fig. 37), so sind die Stücke vom Durchschnittspunkt bis zu den Berührungspunkten einander gleich, und verbindet man den Mittelpunkt des Kreises mit dem Durchschnittspunkt der Tangenten durch eine gerade Linie CN, so halbirt diese Linie den Winkel, welchen beide Tangenten bilden: (Tangentenwinkel BNM).

Das Behauptete folgt aus der Congruenz der Dreiecke CMN und CBN.

§. 69. Folgesatz. Halbirt man einen Tangentenwinkel (W. BNM. Fig. 37), so geht die Halbirungslinie NC durch den Mittelpunkt des Kreises.

Die Verbindungslinie des Mittelpunkts mit der Spitze des Tangentenwinkels halbirt, nach §. 68, diesen Winkel; mithin fällt die Halbirungslinie mit der Verbindungslinie NC zusammen und geht daher durch den Mittelpunkt des Kreises.

§. 70. Lehrsatz. Zu gleichen Centriwinkeln in ein und demselben Kreise gehören auch gleiche Bogen, Sehnen, Sectoren und Segmente.

Legt man die gleichen Centriwinkel mit ihren Scheitelpunkten und Schenkeln auf einander, so fallen auch, wegen Gleichheit der Radien, die Endpunkte dieser Schenkel auf einander; mithin decken sich die Bogen u. s. w.

§. 71. Folgesatz. Jeder Kreis wird durch seinen Durchmesser halbirt.

§. 72. Lehrsatz. Der Centriwinkel ist doppelt so groß als jeder Peripheriewinkel, welcher mit ihm auf gleichen Bogen steht.

1) Ein Schenkel des Centriwinkels fällt mit einem Schenkel des Peripheriewinkels zusammen (Fig. 38. I).

$$v = r + s \text{ (§. 30. 2).}$$
$$r + s = 2r$$
$$v = 2r.$$

2) Die Schenkel des Centriwinkels fallen beide in die Fläche des Peripheriewinkels (Fig. 38. II).

$$r = 2o \text{ (Nr. 1.)}$$
$$s = 2n$$
$$\overline{r + s = 2(o + n).}$$

3) Ein Schenkel des Centriwinkels wird von einem Schenkel des Peripheriewinkels geschnitten (Fig. 38. III). Man ziehe die Hülfslinie AB, so ist:

$$m + o = 2n + 2r$$
$$m = 2n \quad \text{subtrahirt}$$
$$\overline{o = 2r.}$$

§. 73. Folgesätze.

1) **Alle Peripheriewinkel, welche in einem Kreise auf gleichen Bogen stehen, sind einander gleich.**

Jeder ist die Hälfte des zugehörigen Centriwinkels.

2) **Zu gleichen Peripheriewinkeln gehören in einem Kreise gleiche Bogen und Sehnen.**

Gleiche Peripheriewinkel haben einen und denselben Centriwinkel, und gleiche Centriwinkel wiederum gleiche Bogen und Sehnen. §. 70.

3) **Jeder Peripheriewinkel im Halkreise, welcher mit seinen Schenkeln auf den Endpunkten des Durchmessers steht, ist = R.**

Der zugehörige Centriewinkel auf demselben Bogen ist = 2 R, mithin der Peripheriewinkel im Halbkreise = R.

§. 74. Lehrsatz. Zwei Centriwinkel eines Kreises verhalten sich direct wie die ihnen zugehörigen Bogen und Ausschnitte. (Fig. 37).

Behaupt.: W. ACM : W. ACD = Bg. AM : Bg. AD

Beweis. Denkt man sich einen Winkel x als gemeinschaftliches Gemäß in W. ACM mmal und in W. ACD nmal enthalten, so wird auch der Bogen AM durch den Winkel x in m und der Bogen AD durch den Winkel x in n gleiche Theile getheilt (§. 70). Daher ist:

$$\left.\begin{array}{l} \text{W. ACM} = m \text{ W. x} \\ \text{W. ACD} = n \text{ W. x} \end{array}\right\} \text{ beide Gleichungen durch einander dividirt, giebt}$$

$$\overline{\text{W. ACM : W. ACD} = m \text{ W. x} : n \text{ W. x} = m : n \text{ (§. 133. 1).}}$$

In demselben Verhältniß sind aber auch die Bogen getheilt, daher ist Bg. AM : Bg. AD = m : n

$$\overline{\text{Folglich: W. ACM : W. ACD} = \text{Bg. AM : Bg. AD.}}$$

Anmerkung. Man theilt die ganze Kreislinie in 360 gleiche Theile (Bogengrade) ein, so wie jeden Bogengrad wiederum in

60 Minuten und jede Minute in 60 Secunden. Da sich nun zwei Winkel wie die zwischen ihren Schenkeln mit demselben Radius beschriebenen Bogen verhalten, so können auch die Winkel durch die Bogen gemessen werden. Auf diesen Satz gründet sich die Einrichtung aller Instrumente, mit welchen Winkel gemessen werden. So z. B. mißt man die Grade eines Winkels auf dem Papier mittelst des Transporteurs, oder den Richtungswinkel bei Wurfgeschützen mittelst des Quadranten, indem man die Bogengrade zählt, welche dem zu messenden Winkel entsprechen.

§. 75. Lehrsatz. Die Größe des Centriwinkels eines regulären Polygons wird gefunden, wenn man 360° durch die Anzahl der Seiten desselben dividirt, und die Größe des Polygonwinkels, wenn man den Centriwinkel desselben von 180° abzieht.

Beweis. Denkt man sich vom Mittelpunkt eines regulären Polygons (Fig. 39) nach den Ecken desselben gerade Linien gezogen, so erhält man, weil die entstandenen Dreiecke alle einander $\cong$ sind, so viele gleiche Centriwinkel als das Polygon Seiten hat. Nun betragen aber die Winkel um den Mittelpunkt zusammen 4 R; mithin ist jeder Centriwinkel = 360° dividirt durch die Anzahl der Seiten des Polygons.

In den congruenten Dreiecken des Polygons sind ferner die Winkel an den Polygonseiten einander gleich, und je zwei davon geben den Polygonwinkel. Zieht man daher den Centriwinkel von 180° ab, so giebt der Differenzwerth die Größe des Polygonwinkels an; z. B.:

Im 5 Eck: Centriwinkel $= \frac{360}{5}° = 72°$.
Polygonwinkel $= 180° - 72° = 108°$.
6 Eck: Centriwinkel $= \frac{360}{6}° = 60°$.
Polygonwinkel $= 180° - 60° = 120°$.
u. s. w.

§. 76. Lehrsatz. Die Seite AB (Fig. 39) des regulären 6 Ecks im Kreise ist gleich dem Radius desselben.

Beweis. Ist ABCDEF ein reguläres 6 Eck im Kreise, so ist $m + n = 180° - \frac{360}{3}° = 120°$. Da aber auch $n = m$, so ist $2n = 120$ und $n = 60° = m$; mithin das Dreieck ABM gleichseitig und daher $AB = AM = r$.

§. 77. Aufgaben.

1) Es ist ein Kreis BADxy (Fig. 40.) gegeben, man soll den Mittelpunkt dieses Kreises bestimmen.

Auflöſung: Man ziehe zwei Sehnen AB und AD, welche ſich in einem Punkt A treffen, halbire dieſelben und errichte in den Halbirungspunkten die Normalen EC und FC; der Punkt C, in welchem ſich dieſe Normalen ſchneiden, iſt der Mittelpunkt des Kreiſes.

Beweis. Weil $m + n < 2R$, ſo müſſen ſich die Normalen EC und FC ſchneiden, und nach §. 67. 3 gehen beide durch den Mittelpunkt des Kreiſes. Nun können ſich aber zwei gerade Linien nur in einem Punkte ſchneiden, mithin muß auch ihr Durchſchnittspunkt der Mittelpunkt des Kreiſes ſein.

2) **Man ſoll um ein gegebenes Dreieck ABD (Fig. 40) einen Kreis beſchreiben** *).

Auflöſung: Da die Seiten des Dreiecks Sehnen des verlangten Kreiſes werden ſollen, ſo halbire man zwei dieſer Seiten und errichte in den Halbirungspunkten E und F die Normalen EC und FC. Ihr Durchſchnittspunkt C iſt alsdann der Mittelpunkt des Kreiſes, denn die Normalen EC und FC fallen, nach §. 67. 3, mit den Radien des Kreiſes zuſammen.

3) **In ein gegebenes Dreieck ſoll ein Kreis beſchrieben werden** **).

Auflöſung: Halbirt man zwei Winkel des Dreiecks, ſo ſchneiden ſich die Halbirungslinien und ihr Durchſchnittspunkt iſt, nach §. 69, der Mittelpunkt des Kreiſes, zu welchem die Seiten des Dreiecks Tangenten ſind. Zieht man nun von dem gefundenen Mittelpunkt auf eine Seite des Dreiecks eine Normale, ſo läßt ſich mit dieſer der verlangte Kreis beſchreiben.

4) **Man ſoll ein reguläres 6 Eck im Kreiſe beſchreiben.**

Auflöſung: Man trage den Radius 6 mal in der Peripherie des Kreiſes als Sehne ab. §. 76.

5) **Man ſoll ein gleichſeitiges Dreieck im Kreiſe beſchreiben.**

Auflöſung: Conſtruirt man ein reguläres 6 Eck im Kreiſe, und verbindet ſodann den 1ſten Eckpunkt A (Fig. 39) mit dem 3ten E und den 3ten mit dem 5ten C durch gerade Linien, ſo iſt AEC das verlangte Dreieck.

---

*) Ein Kreis iſt um ein Dreieck beſchrieben, wenn die Peripherie deſſelben durch die Ecken des Dreiecks geht, mithin die Seiten des Dreiecks Sehnen des Kreiſes ſind.

**) Ein Kreis iſt in ein Dreieck beſchrieben, wenn die Seiten deſſelben Tangenten des Kreiſes ſind.

6) **Man ſoll ein reguläres 12 Eck im Kreiſe beſchreiben.**

Auflöſung: Man conſtruire ein reguläres 6 Eck im Kreiſe, fälle aus dem Mittelpunkt M (Fig. 39) Normalen auf die Seiten deſſelben, verlängere dieſe Normalen bis ſie die Peripherie des Kreiſes ſchneiden, und verbinde die Durchſchnittspunkte mit den Eckpunkten des 6 Ecks durch gerade Linien. Alsdann iſt AGBKCLDNEOFP das verlangte 12 Eck, denn Δ AMG $\cong$ Δ GMB $\cong$ Δ BMK u. ſ. w. (§. 40), daher auch AG = GB = BK u. ſ. w.

7) **Man ſoll ein reguläres 6 Eck um den Kreis beſchreiben.**

Auflöſung: Man conſtruire wie in der Aufgabe 6, ziehe aber an die Durchſchnitttspunkte in der Peripherie Tangenten, ſo bilden letztere die Seiten des verlangten 6 Ecks um den Kreis.

Beweis. Δ QMR $\cong$ RMS $\cong$ SMV u. ſ. w. (§. 42). (Die Dreiecke haben je zwei eine Seite mit einander gemein und die halben Polygonwinkel ſind ſämmtlich einander gleich).

8) **Man ſoll ein reguläres 4 Eck im Kreiſe beſchreiben.**

Auflöſung: Man ziehe zwei Durchmeſſer, welche normal auf einander ſtehen, und verbinde ihre Durchſchnittspunkte in der Peripherie des Kreiſes durch gerade Linien. Hierdurch entſteht das reguläre Viereck (Quadrat) im Kreiſe. (§. 40).

Anmerkung. Soll man ein reguläres 8 Eck, 16 Eck u. ſ. w. in den Kreis, oder ein reguläres 4 Eck, 8 Eck u. ſ. w. um den Kreis beſchreiben, ſo iſt, vom regulären 4 Eck im Kreiſe ausgehend, die Auflöſung eben ſo wie in den Aufgaben 6 und 7.

9) **Man ſoll an einen Punkt in der Peripherie eines Kreiſes eine Tangente ziehen.** (§. 66).

10) **Außerhalb eines Kreiſes (Fig. 40) iſt ein Punkt M gegeben; man ſoll durch dieſen Punkt eine Tangente an den Kreis legen.**

Auflöſung: Man verbinde den Punkt M mit dem Mittelpunkt C des Kreiſes, halbire hierauf MC und ſchlage aus dem Halbirungspunkt N mit $\frac{1}{2}$ MC einen Kreis. Verbindet man nun die Durchſchnittspunkte beider Kreiſe x und y mit M, ſo iſt ſowohl Mx als auch My die verlangte Tangente. §. 73. 3.

11) **Man ſoll in einen Kreis ein reguläres n Eck beſchreiben.**

Auflöſung: Man theile die Winkel um den Mittelpunkt des Kreiſes (360°) durch Radien in n gleiche Theile, und verbinde die Endpunkte dieſer Radien durch gerade Linien, ſo iſt die entſtandene Figur das verlangte n Eck.

Fünftes Kapitel.

Von der Inhaltsbestimmung der geradlinigen Figuren und des Kreises.

§. 78. Zwei Rechtecke, welche ein Paar gleiche Seiten haben, verhalten sich zu einander, wie das andere Paar Seiten.

Voraus: BC = bc (Fig. 41).

Behaupt.: AB. BC: ab. bc = AB; ab.

Beweis. Man denke sich AB und ab mit einem gemeinschaftlichen Längengemäß, etwa eb, gemessen, und nehme an: das Gemäß eb sei in AB m mal und in ab n mal enthalten. Alsdann ist:

$$\left.\begin{matrix} AB = m.eb \\ ab = n.eb \end{matrix}\right\}$$ durch einander dividirt, giebt:

AB : ab = m. eb : n. eb = m : n (§. 133. 1 Zahlenlehre). Denkt man sich nun aus den Theilpunkten E, F, e, f, u. s. w. parallele Linien zu CB und cb gezogen, so wird ABCD in m und abcd in n Rechtecke getheilt, die wiederum einander gleich sind, weil sie gleiche Grundlinie und Höhe haben, so daß also ist:

$$\left.\begin{matrix} ABCD = m.x \\ abcd = n.x \end{matrix}\right\}$$ durch einander dividirt, giebt:

ABCD : abcd = m : n. Es war aber auch:

AB : ab = m : n

folglich: AB. BC : ab. bc = AB : ab.

Auf gleiche Weise würde man erhalten: ABCD : abcd = BC : bc wenn AB = ab wäre, und man kann daher den vorstehenden Lehrsatz auch so ausdrücken:

„Rechtecke verhalten sich bei gleichen Grundlinien wie ihre Höhen, und bei gleichen Höhen wie ihre Grundlinien."

§. 79. Folgesätze.

1) Zwei Parallelogramme A und a verhalten sich bei gleichen Grundlinien G = g, wie ihre Höhen H und h, und bei gleichen Höhen H = h, wie ihre Grundlinien G und g.

Beweis. Man denke sich die gegebenen ∥gramme in die Rechtecke M und m verwandelt, so ist:

$\#\,gr.\ A = M$ } beide Gleichungen durch einander
$\#\,gr.\ a = m$ } dividirt, giebt:

$\#\,gr.\ A : \#\,gr.\ a = M : m$. Nach §. 78. verhält sich aber
$M : m = H : h$, wenn $G = g$, daher auch:
$\#\,gr.\ A : \#\,gr.\ a = H : h$, und ist
$H = h$, so gilt wiederum
$\#\,gr.\ A : \#\,gr.\ a = G : g$.

2) Zwei Dreiecke A und a verhalten sich bei gleichen Grundlinien $G = g$, wie ihre Höhen H und h, und bei gleichen Höhen $H = h$, wie ihre Grundlinien G und g.

Beweis. Man denke sich die gegebenen Dreiecke zu den Parallelogrammen M und m ergänzt, so ist:

$2\,\Delta\,A : 2\,\Delta\,a = \#\,gr.\ M : \#\,gr.\ m$
$\Delta\,A : a\,\Delta\,a = \#\,gr.\ M : \#\,gr.\ m$. Nun ist aber
$\#\,gr.\ M : \#\,gr.\ m = H : h$ (wenn $G = g$), daher auch
$\Delta\,A : \Delta\,a = H : h$, und wenn $H = h$
$\Delta\,A : \Delta\,a = G : g$.

§. 80. Lehrsatz. Zwei Rechtecke verhalten sich zu einander, wie die Producte aus ihren Grundlinien in ihre Höhen.

Voraussetzung: M und m (Fig. 42) sind Rechtecke.

Behauptung: $M : m = G.H : g.h$.

Beweis. Da die gegebenen Rechtecke im zusammengesetzten Verhältniß ihrer Grundlinien und Höhen stehen sollen, so sieht man sich zur Darstellung dieses zusammengesetzten Verhältnisses genöthigt ein Hülfsrechteck P zu construiren, welches mit M gleiche Grundlinie und mit m gleiche Höhe hat.

Alsdann ist nach §. 78: $M : P = H : h$
und $P : m = G : g$
giebt: $M.P : m.P = G.H : g.h$
oder: $M : m = G.H : g.h$.

§. 81. Zusatz. Zwei beliebige #gramme oder Dreiecke stehen im zusammengesetzten Verhältniß ihrer Grundlinien und Höhen.

Der Beweis kann eben so wie bei Rechtecken (§. 80) geführt werden, indem man ein Hülfsparallelogramm oder ein Hülfsdreieck einführt.

§. 82. Lehrsatz. Der Inhalt eines Rechtecks wird gefunden, wenn man die Grundlinie und Höhe desselben mit der Seite eines als Gemäß angenommenen Quadrats mißt, und die hierdurch erhaltenen ganzen oder gebrochenen, unbe-

nannten Zahlen mit einander multiplicirt, ihr Product aber wieder auf das zu Grunde gelegte Quadrat bezieht.

Voraussſ.: $AB = m.ab$ (Fig. 43)

$BC = n.ab$

Behaupt.: $ABCD = m.n.\square abcd$

Beweis. Giebt die Seite AB, mit der Seite des Quadrats abcd gemeſſen, das Maß m, und die Seite CB, mit ab gemeſſen, das Maß n, ſo iſt zunächſt nach §. 80

$ABCD : abcd = AB.BC : ab.ab,$

und da man ſich unter AB, BC und ab nur die Maße zu denken hat, ſo iſt auch

$ABCD : abcd = m.n : 1.1;$

folglich $ABCD = m.n.\square abcd.$

Anmerkung. Dem obigen Lehrſatze gemäß verſteht man unter dem Inhalte einer Figur die ganze oder gebrochene Zahl, welche angiebt wie oft ein als Gemäß gewähltes Quadrat in derſelben enthalten iſt. Eine Figur quadriren heißt daher auch den Flächeninhalt derſelben angeben. Gewöhnlich wird der obige Lehrſatz kürzer ſo ausgedrückt:

„Der Inhalt eines Rechtecks iſt gleich dem Producte aus der Grundlinie und Höhe deſſelben."

Man erhält folglich, wenn A ein Rechteck bedeutet deſſen Grundlinie g und deſſen Höhe h iſt, die Gleichung $A = g.h$ und kann ſich dieſer kürzern Bezeichnung immer bedienen, wenn man nur jedesmal ihren wahren Sinn vor Augen hat, wonach unter g und h nicht die Linien ſelbſt, ſondern ihre Maße zu verſtehen ſind.

§. 83. Folgeſätze.

1) **Der Inhalt eines jeden ∥grs. wird gefunden, wenn man die Höhe deſſelben mit der Grundlinie multiplicirt.**

Beweis. Jedes ∥gr. läßt ſich in ein Rechteck von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe verwandeln, mithin iſt auch ſein Inhalt $= g.h.$ §. 82.

2) **Der Inhalt eines Dreiecks A iſt gleich dem halben Producte aus der Grundlinie und Höhe deſſelben, oder gleich der halben Höhe multiplicirt mit der Grundlinie, oder gleich der halben Grundlinie multiplicirt mit der Höhe.**

Beweis. Ergänzt man das gegebene Dreieck A zu einem ∥gr. M, ſo iſt:

2. $\Delta A = \#gr.M = g.h$, mithin

$$\Delta A = \frac{g.h}{2} = g.\frac{h}{2} = \frac{g}{2}.h.$$

3) Der Inhalt eines Trapezes wird gefunden, wenn man die halbe Summe der beiden parallelen Seiten mit der Höhe deſſelben multiplicirt. (Fig. 44).

Behaupt.: Trapez $ABCD = \frac{AB+CD}{2}.h$

Beweis. Zieht man die Diagonale AC, ſo entſtehen die Dreiecke ADC und ABC, welche beide die Höhe h haben, und man erhält:

$$\Delta ABC = \frac{AB.h}{2}$$

$$\Delta ADC = \frac{DC.h}{2}$$

$$\Delta ABC + \Delta ADC = \frac{AB.h}{2} + \frac{DC.h}{2} = \frac{AB+DC}{2}.h = ABCD.$$

Anmerkung. In der Praxis kommt es zuweilen vor, daß man zur Beſtimmung des Inhaltes eines Dreiecks die Höhe deſſelben nicht meſſen kann. In dieſem Falle drückt man den Inhalt durch die Seiten deſſelben aus, und zwar mittelſt der im nachſtehenden § enthaltenen Formeln.

§. 84. Aufgaben.

1) Man ſoll den Inhalt F eines gleichſeitigen Dreiecks durch die Seite a deſſelben ausdrücken.

Auflöſung: Der Inhalt des gleichſeitigen Dreiecks ABC (Fig. 45) iſt nach §. 83. $2 = \frac{a}{2}.h.$

Da nun aber das Maß von h nicht bekannt iſt, ſo muß daſſelbe durch die Seite a ausgedrückt werden. Hierzu giebt uns das rechtwinklige Dreieck ADC das Mittel an die Hand, denn man hat:

$$h^2 = AC^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

und $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. (§. 99. II. Zahlenlehre).

Setzt man nun den für h gefundenen Werth in die Gleichung $F = \frac{a}{2}.h$, ſo wird

$$F = \frac{a}{2}.\frac{a}{2}.\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

2) Man ſoll den Inhalt F eines gleichſchenkligen Dreiecks durch die Seiten deſſelben ausdrücken.

Auflöſung: Nennt man eine der gleichen Seiten des gleich-

schenkligen Dreiecks b und die dritte Seite (Grundlinie) a, so ist: $F = \frac{a}{2} . h$

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4b^2 - a^2}{4}$$

$$h = \tfrac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$$

daher $F = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}$.

3) Sind die drei Seiten eines Dreiecks gemessen, und durch die Maße a, b und c ausgedrückt, so ist der Inhalt desselben:

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

Anmerkung. Die Herleitung dieser Formel erfordert einige Kenntniß der Algebra, und ist dieselbe deshalb hier übergangen worden.

§. 85. Zusätze.

1) Der Inhalt eines Vielecks wird gefunden, wenn man dasselbe mittelst Diagonalen in Dreiecke zerlegt, und die Inhalte dieser Dreiecke addirt.

2) Ist das Vieleck regulär, so giebt die Normale aus dem Mittelpunkte auf eine Seite mit dem halben Umfang des Vielecks multiplicirt den Inhalt desselben an.

3) Ist die Figur durch krumme Linien begrenzt, so nimmt man in ihrem Umfange mehrere Punkte dergestalt an, daß durch deren Verbindung eine geradlinige Figur entsteht, welche möglichst wenig von der krummlinigen abweicht. Hierauf zerlegt man das erhaltene nEck durch Diagonalen in Dreiecke, deren Inhalte addirt den Inhalt der krummlinigen Figur annähernd geben.

Will man hierbei recht genau zu Werke gehen, so construirt man zwei geradlinige Figuren, die eine in und die andere um die gegebene krummlinige Figur, und nimmt das arithmetische Mittel beider Inhalte als Inhalt der krummlinigen Figur an.

§. 86. Der Inhalt eines Kreises, dessen Radius irgend ein Längengemäß einmal enthält, ist = 3,14159265.... auf Flächengemäß bezogen, so daß z. B. der Inhalt eines Kreises, dessen Radius eine Ruthe beträgt, = 3,14159.... □° ist. Die Zahl 3,14159265.... wird der Kürze wegen durch den

griechischen Buchstaben π (gelesen Pi) bezeichnet. In gewöhnlichen Rechnungen setzt man, je nachdem eine größere oder geringere Genauigkeit erforderlich ist: $\pi = 3{,}14159$ oder $= 3{,}14$.

Ferner drückt die Irrationalzahl π den halben Umfang eines Kreises, dessen Radius $= 1$ ist, aus, und hat man alsdann π auf dasselbe Längengemäß zu beziehen, mit welchem der Radius gemessen wurde. Beträgt hiernach der Radius eines Kreises 1 Fuß, so ist der Umfang dieses Kreises $= 2\pi' = 6{,}28318\ldots.'$

§. 87. Die Zahl π wird auch für die Inhalts- und Umfangsbestimmung aller Kreise, deren Radien $\gtrless$ als 1 sind, als Verhältnißzahl benutzt, indem die Geometrie ferner lehrt, daß sich die Inhalte zweier Kreise wie die Quadrate ihrer Radien, und ihre Umfänge wie diese Radien selbst verhalten.

Soll daher der Umfang U und der Inhalt F eines Kreises, dessen Radius $= r$ gegeben ist, gefunden werden, so hat man die Proportion:

$$U : 2\pi = r : 1, \text{ folglich:}$$

I. $U = 2r\pi = d.\pi$. In Worten:

„Der Umfang eines Kreises wird gefunden, wenn man seinen Durchmesser oder doppelten Radius mit der Verhältnißzahl π multiplicirt."

Ferner ist: $F : \pi = r^2 : 1^2$, folglich:

II. $F = r^2\pi = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi = \frac{d^2\pi}{4}$. In Worten:

„Der Inhalt eines Kreises wird gefunden, wenn man den Radius desselben zum Quadrat erhebt, und mit der Verhältnißzahl π multiplicirt."

Aus den Gleichungen I und II findet man ferner, wenn der Umfang U eines Kreises gegeben ist, den Durchmesser:

$$\text{III. } d = \frac{U}{\pi} = U \,.\, \frac{1}{\pi} = U \,.\, 0{,}31831$$

und wenn der Inhalt des Kreises F gegeben ist:

$$\text{IV. } d = \sqrt{\frac{4.F}{\pi}} = \sqrt{4.F\,.\,0{,}31831}.$$

§. 88. Aufgaben, die Berechnung der Flächen betreffend.

1) In einem Dreieck ist die Grundlinie $g = 4° 9' 3''$ und die Höhe $h = 3° 6'$ ddc. M., wie groß ist der Inhalt des Dreiecks?

Auflösung: Nach §. 83. 2 ist $F = \frac{g.h}{2}$. Setzt man nun für g und h die Werthe, so ist: $F = \frac{(4° 9' 3'')\,(3° 6')}{4}$

$F = 4{,}7708 . 1{,}75 = 8{,}3489\square° = 8\square° 34\square' 89\square''$ dc. M., oder auch $= 8\square° 50\square' 34\square''$ ddc. M. (Zahlenlehre §. 157).

2) Die Seite eines Quadrats ist $= 5° 6' 7''$ dc. M., wie groß ist der Inhalt desselben?

$F = 5{,}67 . 5{,}67 = 32\square° 14\square' 89\square''$.

3) Die Grundlinie eines ⫫grs. ist $= 13° 11' 2''$ ddc. M., und die Höhe desselben $= 8° 9'' 9'''$ dc. M.; wie groß ist der Inhalt desselben in dc. und ddc. M.?

Auflösung: $13° 11' 2''$ ddc. M. $= 13{,}9305°$ dc. M. daher:

$F = 13{,}9305 . 8{,}099 = 112\square° 82\square' 31\square'' 20\square'''$ dc. M.
$= 112\square° 118\square' 76\square'' 31\square'''$ ddc. M.

4) Der Inhalt F eines Dreiecks ist $= 15\square° 5\square' 143\square''$ und die Höhe h desselben $= 3° 11'$ ddc. M.; wie groß ist die Grundlinie des Dreiecks?

Auflösung: $F = \frac{g.h}{2}$; daher $2F = gh$ und $g = \frac{2F}{h}$. Setzt man nun in diese Formel die gegebenen Werthe, so ist:

$$g = \frac{2.(15\square° 5\square' 143\square'')}{3° 11'} = \frac{2.15{,}041618}{3{,}916667} = 7{,}68083°$$

$g = 7° 6' 8'' 0{,}83'''$ dc. M. $= 7° 8' 2''$ ddc. M.

5) Die Seite a eines gleichseitigen Dreiecks beträgt $3° 4' 6{,}3''$ ddc. M.; wie groß ist der Inhalt des Dreiecks in ddc. und dc. M.?

Auflösung: Nach §. 84. 1 ist $F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, daher:

$F = \frac{3{,}377^2}{4} . 1{,}732 = 11{,}404129 . \frac{1{,}732}{4} = 4{,}937988\square°$
$= 4\square° 93\square' 79\square'' 88\square'''$ dc. M.
$= 4\square° 135\square' 10\square'' 17\square'''$ ddc. M.

6) Die gleiche Seite b eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt $5' 9''$ und die Grundlinie a $7' 8''$ dc. M.; wie groß ist der Inhalt desselben?

Auflösung: Nach §. 84. 2 ist $F = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}$, daher:

$F = \frac{0{,}78}{4}\sqrt{4.0{,}59^2 - 0{,}78^2} = 0{,}195 . 0{,}885$
$= 0{,}172575\square° = 17\square' 25\square'' 75\square'''$ dc. M.

7) Die Seiten a, b und c eines Dreiecks sind beziehlich durch 3°, 4° und 2° ausgedrückt; wie groß ist der Inhalt dieses Dreiecks?
Antw.: $2\square° 90\square' 47\square''$.

8) Die 3 Seiten eines Dreiecks sind in Zahlen gegeben, und zwar:
$a = 40° 11' 10''$
$b = 33° 3' 6''$
$c = 18° 5' 8''$ ddc. M.;
wie groß ist der Inhalt des Dreiecks in dc. M.?
Antw.: 302□° 4□′ 70□″ dc. M.

9) Von den beiden parallelen Seiten eines Trapezes ist die eine 3° 7′ 8″ und die andere 5° 9′ lang, so wie die Höhe desselben 6′ 3″ dc. M.; wie groß ist der Inhalt des Trapezes?
Auflösung: $F = \frac{3{,}78 + 5{,}9}{2} . 0{,}63 = 3□° 4□′ 92□″$ (§. 83. 3).

10) Ein Stück Land, welches die Gestalt eines Rechtecks hat, enthält 2 Morgen 126□° 94□′ Fläche, und ist 24° 2′ 5″ dc. M. lang; wie breit ist dieses Stück Land?
Antw.: 20° 8″.

11) Der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks ist = 32□° 122□′ 19,55□″ ddc. M.; wie groß ist die Seite desselben in dc. M. ausgedrückt?
Auflösung: $F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, daher $a^2 = \frac{4F}{\sqrt{3}}$. Nun ist $F =$
$32{,}8482$, daher $a = 2\sqrt{\frac{32{,}8482}{1{,}732}} = 8° 7' 11''$ dc. M.

12) Wie groß ist der Umfang U der normalen Durchschnittsfläche einer Faschine, deren Durchmesser 1 Fuß beträgt?
Antw.: $U = d . \pi = 1 . \pi = 3{,}14159$ Fuß $= 3' 2''$.

13) Wie groß ist der Umfang der normalen Durchschnittsfläche einer Faschine, deren Durchmesser $\frac{3}{4}$ Fuß beträgt?
Antw.: $U = 0{,}75 . 3{,}14159 = 2{,}36' = 2' 4''$.

14) Der Radius r eines Kreises ist 34° 5′ dc. M.; wie groß ist der Inhalt dieses Kreises?
Antw.: $F = 34{,}5^2 . 3{,}1416 = 3739□° 28□′ 94□″$ dc. M. (§. 87. II).

15) Der Durchmesser einer 24pfdgen Kugel beträgt 5,50″; wie groß ist ihr Umfang U?
Antw.: $U = d . \pi = 5{,}50 . 3{,}1416 = 1' 5'' 3{,}35'''$.

16) Der Umfang einer Kugel ist = 4′ 2″ dc. M.; wie groß ist ihr Durchmesser?
Antw.: $d = \frac{U}{\pi} = U . \frac{1}{\pi} = 4{,}2 . 0{,}3183 = 1{,}337' = 1' 3'' 3{,}7'''$.

17) Der Inhalt eines Kreises ist = 3□° 100□′ 60□″ ddc. M.; wie groß ist der Durchmesser desselben in dc. M. ausgedrückt?
Antw.: d = 2° 1′ 7″ dc. M. (§. 87. IV).

18) Der Inhalt eines Kreises ist 3,67891□°; wie groß ist der Radius desselben in ddc. M.?

Antw.: $r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} = \sqrt{3{,}67891 . 0{,}3183} = 1° 11' 10''' \text{ ddc. M}$

19) Man soll die Differenz zweier Kreise berechnen.

Auflösung: Ist der Radius des größern Kreises $R = 3' 4'' 6'''$ und der des kleinern $r = 1' 5''$ gegeben, so ist die Differenz beider Kreise $= R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi = (0{,}346^2 - 0{,}15^2) . 3{,}1416 = 0{,}305414\square° = 30\square' 54\square'' 14\square'''$ dc. M.

Sechstes Kapitel.

Von der Aehnlichkeit der Dreiecke.

§. 89. Erklärung. Man nennt je zwei nicht congruente Figuren ähnlich, wenn sie beziehlich lauter gleiche Winkel haben, und die Quotienten aus je zwei homologen Seiten alle einander gleich sind. Das Zeichen für die Aehnlichkeit der Figuren ist ∞.

§. 90. Lehrsatz. Zieht man innerhalb eines Dreiecks eine Linie, welche zwei Seiten desselben schneidet und mit der dritten parallel läuft, so sind:

I. die Quotienten aus den Stücken der einen Seite beziehlich den Quotienten aus den Stücken der andern Seite,

II. die Quotienten der einen Seite in ihre abgeschnittenen Stücke beziehlich den Quotienten aus der andern Seite in ihre abgeschnittenen Stücke, und

III. die Quotienten aus den homologen Seiten des abgeschnittenen und des ganzen Dreiecks, einander gleich.

Voraussetzung: $DE \parallel AB$ (Fig. 46).

Behauptung: I. $CD : AD = CE : BE$

II. $\begin{cases} AC : CD = BC : CE \\ AC : AD = BC : BE \end{cases}$

III. $\begin{cases} AC : AB = CD : DE \\ BC : AB = CE : DE \end{cases}$

Beweis. Verbindet man A mit E und B mit D durch gerade Linien, so ist nach §. 79. 2:

$$\Delta CDE : \Delta ADE = CD : AD$$
$$\Delta CDE : \Delta BDE = CE : BE.$$

Nun sind aber die Dreiecke ADE und BDE nach §. 61. I einander gleich, mithin ist auch:

$$\text{I. } CD : AD = CE : BE.$$

Die Proportion I giebt aber (nach §. 142. 3 Zahlenlehre) durch Addition:

$$CD + AD : CD = CE + BE : CE, \text{ oder:}$$
$$\text{II. } AC : CD = BC : CE \text{ und}$$
$$AC : AC - CD = BC : BC - CE$$
$$AC : AD = BC : BE.$$

Zieht man $DF \parallel BC$ und $EG \parallel AC$, so ist nach II:

$$AC : AB = CD : BF \text{ und } BC : AB = CE : AG \text{ oder}$$
$$\text{III. } AC : AB = CD : DE \qquad BC : AB = CE : DE, \text{ weil}$$
$$DE = AG = BF.$$

§. 91. Zusatz. Nach §. 89 ist das abgeschnittene Dreieck CDE (Fig. 46) ähnlich dem ganzen Dreieck ABC, denn in beiden Dreiecken sind, weil $DE \parallel AB$ ist, die Winkel beziehlich einander gleich und nach §. 90. III auch die Quotienten aus den homologen Seiten.

§. 92. Lehrsatz. Hat man in einem Dreieck zwei Seiten so geschnitten, daß die Quotienten aus einer geschnittenen Seite und einem ihrer Stücke, oder auch die Quotienten aus den Stücken der geschnittenen Seiten beziehlich einander gleich sind, so ist die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte mit der dritten Seite parallel.

Voraussetzung: 1) $AC : CD = BC : CE$ (Fig. 47).
2) $CD : AD = CE : BE$

Behauptung: $DE \parallel AB$.

Beweis. Wäre DE nicht parallel AB, so müßte es von D aus eine andere Linie, etwa $DF \parallel AB$ geben. Alsdann wäre aber nach §. 90. II: $AC : CD = BC : CF$ und nach der Voraussetzung: $AC : CD = BC : CE$, mithin auch:

$$BC : CF = BC : CE$$
$$BC \cdot CE = BC \cdot CF$$
$$CE = CF.$$

Dieser Widerspruch zeigt aber, daß DF nicht parallel AB sein kann. Eben so läßt sich darthun, daß keine Linie unterhalb DE, etwa DG, parallel AB sein kann, und ist daher nur der eine Fall: „$DE \parallel AB$“ zulässig.

§. 93. **Lehrſatz.** Wird in einem Dreieck ein Winkel halbirt, und die Halbirungslinie bis in die gegenüber liegende Seite verlängert, ſo verhalten ſich die den halbirten Winkel einſchließenden Seiten direct wie die abgeſchnittenen Stücke der gegenüber liegenden Seite.

Vorausſetzung: W. m = W. n (Fig. 48).

Behauptung: AC : BC = AD : BD.

Beweis. Verlängert man AC um EC = BC, ſo iſt:

W. m + W. n = W. o + W. p (§. 30. 2)
2 W. m = 2 W. o (weil m = n und o = p)
W. m = W. o daher
DC ∦ BE und deßhalb nach §. 90
AC : EC = AD : BD und weil EC = BC
AC : BC = AD : BD.

§. 94. **Lehrſatz.** Iſt in einem Dreieck eine Seite in zwei Stücke getheilt, und verhalten ſich dieſe Stücke direct wie die andern Seiten des Dreiecks, ſo wird der von dieſen Seiten eingeſchloſſene Winkel, durch die Verbindungslinie des Theilpunktes mit der gegenüber liegenden Ecke, halbirt.

Vorauſſ.: AD : DB = AC : CB (Fig. 48).

Behaupt.: W. m = W. n.

Beweis. AC um CE = CB verlängert giebt nach der Vorausſetzung

AD : DB = AC : CE
DC ∦ BE
W. m = W. o
W. p = W. n

W. m + W. p = W. o + W. n
W. p = W. o ſubtrahirt, bleibt:

W. m = W. n.

§. 95. Sind von den ſechs Gleichungen, welche der Erklärung gemäß in ähnlichen Dreiecken unter den Seiten und Winkeln ſtattfinden, überhaupt nur drei gegeben, ſo folgt daraus auch die Gleichheit der übrigen. Die ſpeciellen Fälle aber, in welchen die Aehnlichkeit zweier Dreiecke aus drei dieſer Gleichungen folgt, ſprechen ſich in den nachſtehenden Lehrſätzen aus.

§. 96. **Lehrſatz.** Zwei Dreiecke ſind ähnlich, wenn ſie zwei gleiche Winkel haben.

Voraussf.: $\mathfrak{W}.\ A = \mathfrak{W}.\ a$ und
$\mathfrak{W}.\ B = \mathfrak{W}.\ b$ (Fig. 49).

Behaupt.: $\Delta\ ABC \sim \Delta\ abc$.

Beweis. Denkt man sich das Dreieck abc so auf das Dreieck ABC gelegt, daß die Winkel c und C, welche der Voraussetzung gemäß ebenfalls einander gleich sein müssen, sich decken und demnächst $Ca' = ca$, so wie $Cb' = cb$ gemacht, so ist: $\Delta\ a'b'C \cong \Delta\ abc$.
Da nun aber auch $\mathfrak{W}.\ a = \mathfrak{W}.\ A = \mathfrak{W}.\ a'$,
so muß $a'b' \parallel AB$ sein, mithin ist
$\Delta\ a'b'C \sim \Delta\ ABC$ (§. 91), also auch
$\Delta\ abc \sim \Delta\ ABC$.

§. 97. Lehrsatz. Dreiecke sind ähnlich, wenn sie einen gleichen Winkel haben, und die Seiten, welche diesen Winkel einschließen, beziehlich durch einander dividirt gleiche Quotienten geben. (Kürzer sagt man: wenn die den gleichen Winkel einschließenden Seiten proportionirt sind).

Voraussf.: $\mathfrak{W}.\ C = \mathfrak{W}.\ c$ (Fig. 49).
$AC : ac = BC : bc$

Behaupt.: $\Delta\ ABC \sim \Delta\ abc$.

Beweis. Trägt man ac auf AC und bc auf BC vom Punkt C ab, so ist: $\Delta\ a'b'C \cong \Delta\ abc$ und nach der Voraussetzung
$AC : a'C = BC : b'C$, daher
$a'b' \parallel AB$ und
$\Delta\ a'b'C \sim \Delta\ ABC \sim \Delta\ abc$.

§. 98. Lehrsatz. Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen alle Seiten proportionirt sind.

Voraussf.: $AC : ac = BC : bc = AB : ab$ (Fig. 49).

Behaupt.: $\Delta\ ABC \sim \Delta\ abc$.

Beweis. Macht man $a'C = ac$ und $b'C = bc$, so ist nach der Voraussetzung:
$AC : a'C = BC : b'C$
$a'b' \parallel AB$
$\Delta\ a'b'C \sim \Delta\ ABC$; daher auch
$AC : a'C = AB : a'b'$, aber auch gegeben
$AC : ac = AB : ab$, mithin weil $a'C = ac$
$a'b' = ab$, folglich
$\Delta\ a'b'C \cong \Delta\ abc$ (§. 46) und
$\Delta\ abc \sim \Delta\ ABC$.

§. 99. Lehrsatz. Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten des einen Dreiecks zweien Seiten des andern propor-

tionirt sind, und von ihren Gegenwinkeln das eine Paar einander gleich, das andere aber zusammen $\gtrless 2\,R$ ist.

Voraussz.: $AC : ac = BC : bc$ (Fig. 49).

$$\mathfrak{W}.\ A = \mathfrak{W}.\ a$$

$$\mathfrak{W}.\ B + \mathfrak{W}.\ b \gtrless 2\,R.$$

Behaupt.: $\Delta\, ABC \sim \Delta\, abc$.

Beweis. Trägt man wieder ac und bc auf AC und BC ab, so ist nach der Voraussetzung:

$AC : a'C = BC : b'C$

$a'b' \parallel AB$ und

$\Delta\, a'b'C \sim ABC$. Es ist aber auch nach §. 43

$\Delta\, a'b'C \cong \Delta\, abc$, (weil $\mathfrak{W}.\ A = \mathfrak{W}.\ a' = \mathfrak{W}.\ a$ und $b' + b \gtrless 2R$)

folglich $\Delta\, ABC \sim \Delta\, abc$.

§. 100. Lehrsatz. Fällt man in dem rechtwinkligen Dreieck ABC (Fig. 31) aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse eine Normale BD, so entstehen:

I. Zwei ähnliche rechtwinklige Dreiecke, von welchen jedes auch dem ganzen Dreieck ähnlich ist, nämlich:

$\Delta\, ABD \sim \Delta\, ABC$
$\Delta\, BCD \sim \Delta\, ABC$
} sie haben außer dem rechten W. noch einen W. gemeinschaftlich.

$\Delta\, ABD \sim \Delta\, BCD$.

Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke folgt aber unmittelbar:

II. Jede Kathete ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen ihrer Projection*) auf der Hypotenuse und der Hypotenuse selbst.

1) $AD : AB = AB : AC$ mithin auch: $AB^2 = AD \cdot AC$

2) $CD : BC = BC : AC$ $\quad BC^2 = CD \cdot AC$

$\overline{AB^2 + BC^2} = (AD + CD)AC$

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ d. h.

„das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.“

*) Denkt man sich einen Winkel, und von dem Endpunkt des einen Schenkels auf den andern eine Normale gefällt, so wird das Stück, welches diese Normale auf dem andern Schenkel, vom Durchschnittspunkt bis zum Scheitel des Winkels abschneidet, die Projection des einen Schenkels auf den andern genannt.

III. Die Normale ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den von ihr auf der Hypotenuse abgeschnittenen Stücken:

$$AD : DB = DB : DC.$$

§. 101. Lehrsatz. Die Flächen (Inhalte) ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten oder Höhen.

Voraussetzung: $\Delta ABC \sim abc$ (Fig. 50).

Behauptung: $\Delta ABC : \Delta abc = AC^2 : ac^2 = H^2 : h^2$.

Beweis. Aus der Aehnlichkeit der gegebenen Dreiecke folgt:

$$AB : ab = AC : ac \text{ und da } \Delta ACD \sim \Delta acd$$
$$H : h = AC : ac$$
$$AB.H : ab.h = AC^2 : ac^2 \text{ mithin auch}$$
$$\frac{AB.H}{2} : \frac{ab.h}{2} = AC^2 : ac^2 \text{ d. i.}$$
$$\Delta ABC : \Delta abc = AC^2 : ac^2.$$

Da aber $AC : ac = H : h$, so ist auch (§. 98. II. Zahlenl.)

$$AC^2 : ac^2 = H^2 : h^2, \text{ und sodann}$$
$$\Delta ABC : \Delta abc = AC^2 : ac^2 = H^2 : h^2.$$

§. 102. Lehrsatz. Wenn man in ähnlichen n Ecken durch gleichnamige Winkelspitzen Diagonalen zieht, so entstehen $n-2$ Paare ähnliche Dreiecke.

Voraussetzung: $ABCDE \sim abcde$ (Fig. 51).

Behauptung: $\Delta ABC \sim \Delta abc$; $\Delta ACD \sim \Delta acd$ u. s. w.

Beweis. $\Delta ABC \sim \Delta abc$, weil $\mathfrak{W}.B = \mathfrak{W}.b$ und $AB : ab = BC : bc$, mithin auch $\mathfrak{W}.ACB = \mathfrak{W}.acb$ und sodann

$$\mathfrak{W}.BCD - \mathfrak{W}.ACB = \mathfrak{W}.bcd - \mathfrak{W}.acb$$
$$\mathfrak{W}.ACD = \mathfrak{W}.acd$$

Nun ist ferner: $BC : bc = AC : ac$

$$BC : bc = CD : cd \text{ also auch}$$
$$AC : ac = CD : cd$$
$$\Delta ACD \sim \Delta acd \text{ (§. 97).}$$

Auf dieselbe Weise findet man auch: $\Delta ADE \sim \Delta ade$.

§. 103. Lehrsatz. Aehnliche n Ecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten und Diagonalen.

Voraussetzung: $ABCDE \sim abcde$ (Fig. 51).

Behauptung: $ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2$ u. s. w.

Beweis. Nach §. 102 erhält man $n-2$ Paare ähnliche Dreiecke

und ist daher auch $\frac{ABC}{abc} = \frac{AB^2}{ab^2} = \frac{AC^2}{ac^2} = \frac{ADC}{adc} = \frac{AD^2}{ad^2} = \frac{ADE}{ade}$ u. s. w. und nach §. 143 Zahlenlehre:

$ABC+ADC+ADE : abc+adc+ade = AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2$

d. i. $ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2$.

§. 104. Aufgaben.

1) Man soll zu drei gegebenen Linien m, n und r die vierte geometrische Proportional-Linie construiren.

Auflösung: Man trage auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels (W. ACB Fig. 49) die Linien m, n und r dergestalt ab, daß die Proportion I. §. 90 unter den abgetragenen Stücken stattfindet, verbinde hierauf die Endpunkte a' und b' durch eine Gerade und ziehe $AB \parallel a'b'$. Alsdann ist Bb' die gesuchte vierte Proportionale; denn

$$m : r = n : Bb'.$$

2) Man soll zu zwei gegebenen Linien n und m die dritte Proportional-Linie construiren.

Auflösung: Man construire wie in Nr. 1, trage aber die Linie m zweimal ab (Fig. 50); alsdann ist $n : m = m : x$.

3) Man soll zu zwei gegebenen Linien AB und a (Fig. 38. I) die mittlere geometrische Proportional-Linie construiren.

Auflösung: Man errichte über AB einen Halbkreis, schneide $AD = a$ von AB ab, und errichte in D eine Normale DC, welche die Peripherie des Kreises in C schneidet. Verbindet man nun A mit C durch eine Gerade, so ist AC die verlangte mittlere Proportionale; denn

W. $ACB = R$ (§. 73. 3), $DC \perp AB$, folglich nach §. 100 $AB : AC = AC : a$.

4) Man soll das Rechteck ABNM (Fig. 38. I) in ein Quadrat verwandeln.

Auflösung: Man trage die kleinere Seite $AM = a$ auf der größeren AB ab, und construire wie in Nr. 3. Alsdann ist $AC^2 = AB.a = AB.AM$ (§. 100).

5) Man soll eine gerade Linie in mehrere gleiche Theile, z. B. die Linie AC (Fig. 52) in drei gleiche Theile theilen.

Auflösung: Man setze an den Endpunkt C der gegebenen Linie AC eine andere gerade Linie CX unter beliebigem Winkel an, und trage auf dieser Linie irgend eine Länge α dreimal von C aus ab. Verbindet man nun den Endpunkt B der Länge 3α, mit dem andern Endpunkt A durch eine Gerade, und zieht ov und mr parallel AB, so ist die Linie AC in den Punkten v und r, wie verlangt wurde, getheilt.

Beweis. Es ist $\frac{Cr}{\alpha}=\frac{rv}{\alpha}=\frac{Cr+rv}{2\alpha}=\frac{vA}{\alpha}$ (§. 90. I u. §. 143 Zahlenl.).

Man hat also $\frac{Cr}{\alpha}=\frac{rv}{\alpha}=\frac{vA}{\alpha}$ und mit α multiplicirt

$$Cr = rv = vA.$$

6) Man soll einen Schrittmaßstab, von welchem sich die Längen 100, 80, 60, 40, 20 Schritt u. s. w. abnehmen lassen, anfertigen.

Auflösung: Man nehme eine Linie AB (Fig. 66), welche in dem zu entwerfenden Maßstab eine Länge von 500 Schritt ausdrücken soll, an, theile AB in 5 gleiche Theile, errichte in den Endpunkten A und B die Normalen AC und BD, trage auf AC irgend eine Länge Aa 5mal ab, ziehe die Transversale Cn, so wie aQ, bP, cO, dN und CM ∥ AB.

Alsdann ist: An = no = os = sq = qB = $\frac{1}{5}$AB = $\frac{500}{5}$ = 100 Schr., AC : ac = An : aα (§. 90. III), und weil AC 5, so wie aC 4 gleiche Theile enthält, und nächstdem An = 100 Schr. ist, so giebt die obige Proportion auch:

$$5:4 = 100:a\alpha$$

$$a\alpha = 80 \text{ Schr.}$$

Eben so findet man: bβ = 60, cγ = 40 und dδ = 20 Schr.

Anmerkung. Hätte man dagegen einen verjüngten Maßstab für Artillerie-Zeichnungen, nach dem Verhältniß 1:12, zu entwerfen, so daß also der verjüngte Maßstab 12mal kleiner als die natürliche Länge werden sollte, so würde man der Linie AB (Fig. 66) die Bedeutung eines Fußes unterlegen, und derselben die Länge eines Zolles der natürlichen Länge geben. Theilte man hierauf AB in 12 gleiche Theile, so gäbe jeder Theil die Länge eines Zolles an, und zöge man die Transversale Cn, so schnitte dieselbe auf den parallelen Linien aQ, bP u. s. w. die Längen aα = 0,80″, bβ = 0,60″ u. s. w. ab.

7) Man soll das △ ABC (Fig. 52) in drei gleiche Theile theilen, so daß die Theilungslinien parallel mit der Seite AB laufen.

Auflösung: Man beschreibe über BC einen Halbkreis, theile BC, nach Nr. 5, in drei gleiche Theile, errichte in den Theilpunkten m und o die Normalen oF und mD, und schlage mit den Zirkelöffnungen CD und CF Kreisbogen, welche BC in n und p schneiden. Zieht man hierauf ps und nu ∥ AB so ist △ ABC wie verlangt getheilt.

Beweis. Weil △ ABC ∽ △ uCn, so ist nach §. 101

△ ABC : △ uCn = CB² : Cn² = CB² : CD² = CB . CB : CB . Cm = CB : Cm = 3α : α = 3 : 1; daher △ uCn = $\frac{1}{3}$ △ ABC.

Aus der Proportion: △ ABC : △ sCp = CB² : Cp² findet man

ferner $\Delta sCp = \frac{2}{3}\Delta ABC$, daher auch
$sunp = \frac{2}{3}\Delta ABC - \frac{1}{3}\Delta ABC = \frac{1}{3}\Delta ABC$, so wie
$ABps = \Delta ABC - \frac{2}{3}\Delta ABC = \frac{1}{3}\Delta ABC$.

8) Es ist das 5 Eck ABCDE (Fig. 51) gegeben; man soll ein ihm ähnliches 5 Eck über der Linie ab construiren.

Auflösung: Man zerlege das gegebene 5 Eck durch Diagonalen in Dreiecke und construire, vom ΔABC ausgehend, über ab, ac und ad beziehlich ähnliche Dreiecke, und zwar durch Antragen von zwei gleichen Winkeln, oder mittelst eines Winkels und zweier proportionirter Seiten. Für das Dreieck abc würde man z. B. proportionirte Seiten erhalten, wenn man die Länge von bc aus den gegebenen Linien AB, BC und ab, nach Aufgabe Nr. 1 bestimmte. Noch einfacher erhält man das 5 Eck $abcde \sim ABCDE$, wenn man $ae \parallel AE$, $bc \parallel BC$ u. s. w. zieht.

9) Der Maßstab eines Planes hat die Länge a, man soll diesen Plan auf einem doppelt so großen Stück Papier copiren.

Auflösung: Da Zeichnungen oder Pläne von ein und derselben Gegend stets einander ähnlich sein müssen, und nächstdem ähnliche Figuren im quadratischen Verhältniß ihrer Maßstäbe stehen (§. 103), so ist, wenn man die Inhalte beider Pläne F und F′, und die Länge des gesuchten Maßstabes x nennt: $F:F' = a^2:x^2$ oder

$$1:2 = a^2:x^2 \text{ und } x = a\sqrt{2}.$$

Hätte man dagegen die Länge des Maßstabes doppelt genommen, so würde der nach diesem Maßstabe gezeichnete Plan viermal so groß als der gegebene werden; denn

$$F:F' = a^2:(2a)^2 = a^2:4a^2 = 1:4$$

also $F' = 4F$.

Soll dagegen der Maßstab für einen Plan von doppelt so großen Inhalt aus der Länge a, durch Construction gefunden werden, so construire man ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem jede Kathete = a ist. Die Hypotenuse S dieses Dreiecks giebt alsdann die Länge des gesuchten Maßstabes, denn man hat:

$$S^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$
$$S = a\sqrt{2}.$$

Zweite Abtheilung.

Die körperliche Geometrie (Stereometrie).

Siebentes Kapitel.

Von den einfachen Körpern: Prisma, Pyramide, Cylinder, Kegel und Kugel.

A. Erklärungen, und Angabe der Formeln zur Berechnung der Körper.

I. Vom Prisma.

§. 105. Erklärungen.

Ein Körper, welcher von zwei parallelen n Ecken (als Grundflächen) und n Parallelogrammen (als Seitenflächen) begrenzt wird, heißt ein Prisma. Hiernach ist ABCDEFHG (Fig. 53) ein 4 seitiges Prisma. Jede Durchschnittslinie von je zwei den Körper begrenzenden Ebenen, als: AE, AB, BF u. s. w. wird eine Kante, und der senkrechte Abstand mn beider Grundflächen die Höhe des Prismas genannt. Ein Prisma heißt senkrecht (normal) oder schief, je nachdem die Seitenkanten desselben senkrecht oder schief auf den Grundflächen stehen. Hiernach ist abcdefgh ein schiefes Prisma. (Fig. 54).

Laufen in einem Prisma die Grundflächen nicht mit einander parallel, so wird dasselbe ein schief abgeschnittenes Prisma genannt, z. B. ABCDEF (Fig 55). Beim schief abgeschnittenen Prisma sind die Seitenflächen Trapeze.

Ein Prisma wird ein Parallelepipedum genannt, wenn die Grundflächen desselben Parallelogramme sind, und zwar insbesondere ein rechtwinkliges, wenn die Begrenzungsflächen Rechtecke sind, und die Seitenkanten senkrecht auf den Grundflächen stehen. Hiernach ist das Parallelepipedum Fig. 53 ein rechtwinkliges, und das in Fig. 54 ein schiefwinkliges.

Sind die Seiten- und Grundflächen eines Prismas Quadrate, so heißt dasselbe ein Würfel oder Kubus.

§. 106. Der Inhalt eines Prismas wird gefunden, wenn man die Höhe desselben mit irgend einem Längengemäß und die Grundfläche mit dem Quadrate dieses Gemäßes mißt, die erhaltenen Maße aber mit einander multiplicirt, und ihr Produkt auf einen Kubus (Würfel) bezieht, welcher das gewählte Längengemäß zur Kante hat. Nimmt man daher den Würfel c (Fig. 56.), als Gemäß des Prismas P an, und enthält sodann die Höhe des Prismas die Seite des Würfels n mal, so wie die Grundfläche G das Quadrat der Seite k m mal, so ist der körperliche Inhalt des Prismas $P = m.\ n.\ c$, wofür man, wenn k eine Ruthe oder einen Fuß bedeutet: $P = m.\ n^{c_0}$, oder $P = m.\ n^{c'}$ schreibt.

Der Inhalt eines Prismas und demnächst auch der Inhalt eines jeden Körpers ist also die ganze oder gebrochene absolute Zahl, welche angiebt, wie oft ein als Gemäß angenommener Würfel, oder ein bestimmter Theil desselben in ihm enthalten ist.

Den vorstehenden Satz drückt man gewöhnlich kürzer, wie folgt, aus:

„Der Inhalt eines Prismas wird gefunden, wenn man den Inhalt seiner Grundfläche mit der Höhe desselben multiplicirt."

§. 107. Der Inhalt F eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas (Fig. 55.) ist gleich der Summe seiner drei parallelen Kanten, multiplicirt mit dem dritten Theile eines auf diesen Kanten normal stehenden Durchschnitt-Dreiecks. Man hat daher:

$$F = \frac{\Delta\ GHK}{3}(AE + CF + BD).$$

II. Von den Pyramiden.

§. 108. Erklärungen.

Eine Pyramide ist ein von einem n Eck (als Grundfläche) und von n Dreiecken (als Seitenflächen) begrenzter Körper. Die senkrechte Linie FH (Fig. 57) von der Spitze F auf

die Grundfläche ABCDE oder auf ihre Verlängerung, heißt die Höhe der Pyramide.

Die Pyramiden werden nach der Anzahl ihrer Seiten in dreiseitige, vierseitige, fünfseitige und allgemein n seitige eingetheilt. Hiernach ist ABCDEF (Fig. 57) eine fünfseitige Pyramide.

Trifft die Höhe einer Pyramide auf den Mittelpunkt der Grundfläche, so heißt dieselbe rechtwinklig, in jedem andern Falle aber schief.

Die rechtwinklige Pyramide wird noch insbesondere regulär genannt, wenn ihre Grundfläche eine reguläre Figur ist. In diesem Falle sind die Seitenflächen congruente Dreiecke, und die Pyramide heißt auch gleichseitig.

Wird von einer Pyramide ABCDEF (Fig. 57) ein Pyramiden-Stück abcdeF, durch eine mit der Grundfläche parallel laufende Ebene abgeschnitten, so heißt das übrig bleibende Stück eine abgekürzte Pyramide.

Hat ein Körper die Gestalt einer abgekürzten Pyramide, und bilden die parallelen Grundflächen Parallelogramme, so heißt ein solcher Körper ein Obelisk, wenn die Kanten der Grundflächen einander nicht proportionirt sind. Hiernach sind die Gräben der Preuß. Belagerungsbatterien Obelisken.

§. 109. Jede Pyramide ist der dritte Theil von einem Prisma, welches mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat. Es wird daher der Inhalt einer Pyramide gefunden, wenn man ihre Grundfläche mit der Höhe multiplicirt und von diesem Product den dritten Theil nimmt.

Ist daher g das Maß der Grundfläche einer Pyramide, und h das Maß ihrer Höhe, so ist ihr körperlicher Inhalt:

$$F = \frac{g.h}{3}.$$

§. 110. Ist G das Maß der größern Grundfläche einer abgekürzten Pyramide und g das Maß der kleinern Grundfläche, so wie h das Maß der Höhe derselben, so ist ihr Inhalt:

$$F = \frac{h}{3}\ (G + g + \sqrt{G.g}).$$

§. 111. Der Inhalt F eines Obelisken ABCDEGFH (Fig. 58), dessen Maße M, N, m, n und h die in der Figur bezeichneten Linien ausdrücken, wird durch folgende Formel gefunden:

$$F = \frac{h}{6}\ (2M.N + 2m.n + M.n + N.m).$$

III. Von den Cylindern.

§. 112. **Erklärungen.** Ein Cylinder ist ein prismatischer, von zwei gleichen Kreisen (als Grundflächen) begrenzter Körper.

Laufen die Grundflächen CMD und ANB (Fig. 59) mit einander parallel, so heißt der Cylinder ein voller, und laufen sie nicht mit einander parallel, ein abgekürzter.

Die gerade Verbindungslinie mn der Mittelpunkte beider Grundflächen heißt die Axe des Cylinders.

Ein Cylinder wird senkrecht oder schief genannt, je nachdem die Axe desselben senkrecht oder schief auf den Grundflächen steht.

Die gekrümmte Seitenfläche des Cylinders heißt der Cylinder-Mantel.

§. 113. Der Cylinder kann als ein Prisma betrachtet werden, dessen Grundflächen Kreise sind, und ist daher der Inhalt eines Cylinders, dessen Höhe h und dessen Grundfläche den Radius r hat, $= G.h = r^2 \pi h$ und durch den Durchmesser der Grundfläche ausgedrückt:

$$F = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi.h. = \frac{d^2 \pi.h}{4}.$$

IV. Vom Kegel.

§. 114. **Erklärungen.** Ein Kegel ist ein pyramidenförmiger Köper, dessen Grundfläche ein Kreis ist (Fig. 60).

Die gekrümmte Seitenfläche des Kegels wird der Mantel, und die gerade Linie CD von der Spitze C nach dem Mittelpunkt D der Grundfläche, die Axe desselben genannt.

Der Kegel heißt senkrecht oder schief, je nachdem seine Axe senkrecht oder schief auf der Grundfläche steht.

Die Normale von der Spitze auf die Grundfläche wird die Höhe, und jede, von einem Punkt im Umfange der Grund-

fläche nach der Spitze gezogene, gerade Linie AC eine Seite des Kegels genannt.

Schneidet man von einem Kegel die Spitze oambC (Fig. 60) ab, so entsteht ein abgekürzter Kegel und zwar ein paralleler abgekürzter AMBOambo, wenn beide Grundflächen desselben parallel laufen, und ein schief abgekürzter, wenn die Grundflächen nicht parallel laufen.

§. 115. Durchschneidet man einen senkrechten Kegel AMBNC (Fig. 61), durch eine mit der Seite AC parallel laufende Ebene NDMF, so entsteht auf dem Kegelmantel eine Krumme Linie NDM, welche eine Parabel genannt wird. Läuft aber die den Kegelmantel und die Grundfläche schneidende Ebene ODPG nicht parallel mit der Seite des Kegels, so heißt die auf dem Mantel gebildete krumme Linie ODP eine Hyperbel. Legt man durch einen Kegel eine Ebene ERDS, welche den Mantel desselben auf beiden Seiten und zugleich seine Axe schief durchschneidet, so heißt die auf dem Kegelmantel gebildete krumme Linie ERDS eine Ellipse. Schneidet aber eine Ebene die Axe des Kegels normal, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis.

§. 116. Bedeutet h das Maß der Höhe und r das Maß des Radius der Grundfläche, so ist der Inhalt des Kegels:

$$F = \frac{r^2 \pi . h}{3} = \frac{d^2 . \pi . h}{12}.$$

Für einen ++ abgekürzten Kegel, dessen Höhe a, und dessen Radien der Grundflächen R und r sind, giebt die Formel:

$$F = \frac{a . \pi}{3} (R^2 + r^2 + R . r)$$ den Inhalt an.

V. Von der Kugel.

§. 117. Erklärungen.

Bewegt man einen Halbkreis um seinen Durchmesser vollständig herum, so beschreibt die Peripherie desselben eine krumme Fläche (Kugeloberfläche), und der von dieser Fläche eingeschlossene Körper, wird eine Kugel genannt.

Eine Kugel ist daher ein Körper, welcher von einer krummen Fläche dergestalt begrenzt wird, daß ein innerhalb liegender Punkt überall gleich weit von derselben absteht.

Jede Ebene ABCD (Fig. 62), die man durch eine Kugel legt, theilt dieselbe in zwei Kugelabschnitte. Der Theil der Kugeloberfläche ABCDE, welcher einem Kugelabschnitte angehört, heißt eine Kalotte oder Kugelmütze.

Ein Kugelausschnitt ist ein kegelförmiges Stück der Kugel, dessen Grundfläche eine Kalotte bildet, und dessen Spitze mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammenfällt, z. B. ABCDEM (Fig. 62).

Geht eine Durchschnittsebene durch den Mittelpunkt der Kugel, so heißt sie ein größter Kugelkreis.

Werden mehrere parallele Ebenen durch die Kugel gelegt, so geben die Durchschnittsfiguren Parallel-Kreise.

Jede Linie, welche durch den Mittelpunkt der Kugel geht, heißt eine Axe der Kugel. Die Punkte C nnd F, in welchen die Axe CF die Kugeloberfläche schneidet, werden die Pole der Kugel genannt.

§. 118. Formeln, zur Berechnung der Kugelkörper.

1) Der Flächeninhalt F einer Kalotte, durch ihre Höhe h und den Radius R der zugehörigen Kugel ausgedrückt, ist:

$$F = 2R\pi h.$$

2) Legt man durch den Mittelpunkt der Kugel eine Ebene, so wird die Kugeloberfläche in zwei Kalotten getheilt, wovon jede den Radius der Kugel zur Höhe hat. Nach Nr. 1 ist daher die Oberfläche der Kugel $= 2R\pi R + 2R\pi.R = 4R^2\pi$ d. h. „die Oberfläche der Kugel ist viermal so groß als der größte Kugelkreis;“ und durch d ausgedrückt $= 4\left(\frac{d}{2}\right)^2\pi = 4.\frac{d^2}{4}\pi = d^2\pi.$

3) Der Inhalt einer Kugel ist $= \frac{4R^3\pi}{3} = \frac{d^3\pi}{6}.$

4) Es ist der Inhalt eines Kugelabschnittes $F = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$, durch seine Höhe h und durch den Radius R der Kugel ausgedrückt; oder auch $F = \frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2)$, durch die Höhe h und den Radius r seiner Grundfläche ausgedrückt.

B. Aufgaben, die Berechnung der Körper betreffend.

§. 119. Als Gemäßeinheit der Körper ist die Kubikruthe, d. h. ein Körper dessen Grundfläche eine Quadratruthe und dessen Höhe eine Längenruthe mißt, angenommen worden. Um aber auch Bruchtheile der Ruthe in ganzen Zahlen ausdrücken zu können, so hat man die Kubikruthe in kleinere Gemäße, nämlich in Kubikfuße, Kubikzolle und Kubiklinien getheilt. Die Anzahl Kubikfuße, welche eine Kubikruthe enthält, bekommt man aber sogleich, wenn man zwei Kanten der Grundfläche so wie die Höhe beim ddc. M. in 12 und beim dc. M. in 10 gleiche Theile theilt.

Alsdann enthält die Kubikruthe nach §. 106:

$12.12.12 = 1728^{c'}$ ddc. M., oder $10.10.10 = 1000^{c'}$ dc. M. (Vergleiche §. 122. 3 Zahlenlehre).

Bei der Berechnung der Körper bedient man sich gewöhnlich des ddc. Maßes (Werkmaßes). In den nachstehenden Beispielen beziehen sich die gegebenen Maße stets auf ddc. M., und die Verhältnißzahl π ist zu 3,14159 angenommen.

1) Die Grundfläche g eines Prismas beträgt $12\square' 30\square''$, und die Höhe h desselben 10'; wie groß ist sein Inhalt?

Auflösung: Der Inhalt F eines Prismas ist nach §. 106 = g.h. Man hat daher:

$F = (12 + \frac{30}{144}).10 = 122{,}083^{c'} = 122^{c'} + 0{,}083.1728^{c''}$
$= 122^{c'}\ 143{,}424^{c''}$.

2) Ein Cylinder ist 4° hoch, und der Halbmesser seiner Grundfläche beträgt 5' 3''; wie groß ist sein Inhalt F?

Auflösung: $F = r^2 \pi . h$ (§. 113), und wenn man die gegebenen Werthe substituirt:

$F = (63^2 . \pi . 576)^{c''} = 7182126^{c''} = 4156^{c'}\ 558^{c''} = 2^{c^0}\ 700^{c'} 558^{c''}$.

3) Welchen Inhalt hat eine 800' hohe Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck bildet, dessen aneinander stoßende Seiten 600 und 625' messen?

Antw.: $F = \frac{600.625.800}{3} = 100000000^{c'} = 57870^{c^0}\ 640^{c'}$.

4) Wie groß ist der Inhalt einer parallel abgekürzten Pyramide, wenn das Maß der größern Grundfläche $G = 121\square'$, das der kleinern $g = 64\square'$, und ihre Höhe $h = 57'$ gegeben ist?

Antw.: Nach §. 110 ist:

$F = \frac{57}{3} (121 + 64 + \sqrt{121.64}) = \frac{57}{3} (185 + 11.8) = 5187^{c'}$
$= 3^{c^0}\ 3^{c'}$.

5) Wie groß ist der körperliche Inhalt des Langenfeldes eines 12 pfündigen Kanonenrohrs, wenn:

die Länge des Langenfeldes $h = 2'\,9{,}5''$

der Durchmesser { der Seele $s = 4{,}54''$; des Langenfeldes hinten $D = 10{,}2''$; " " vorn $d = 8{,}94''$ gegeben ist?

Auflösung: Das Langenfeld bildet einen abgekürzten Kegel, von welchem der Inhalt der Seele (Zylinder) abzuziehen ist. Man hat daher:

$$F = \frac{h\pi}{3}\left(\frac{D^2}{4} + \frac{d^2}{4} + \frac{Dd}{4}\right) - \frac{s^2\pi.h}{4} = \frac{h\pi}{12}(D^2 + d^2 + Dd - 3s^2)$$

$$F = \frac{33{,}5.3{,}14159}{12}(10{,}2^2 + 8{,}94^2 + 10{,}2.8{,}94 - 3.4{,}54^2)$$

$$F = \frac{33{,}5.3{,}14159}{12}.213{,}3168 = 1870{,}846^{c''} = 1^{c'}\,142{,}846^{c''}.$$

6) Wie groß ist der Inhalt einer Traverse, welche eine abgekürzte Pyramide bildet, wenn die Grundfläche derselben ein Rechteck ist, dessen zusammenstoßende Seiten 26′ und 42,7′ messen, und wenn nächstdem die Grundlinie und Höhe der kleinern Grundfläche durch die Maße 34,7′ und 20,7′ ausgedrückt, so wie die Höhe h der Pyramide = 9,5′ gegeben ist?

Auflösung: Berechnet man zunächst die Grundflächen G und g so findet sich nach Aufgabe 4: $F = 5^{c^0}\,53^{c'}\,525^{c''}$.

7) Wie groß ist der körperliche Inhalt einer Appareille, wenn ihre obere Breite ab = 8′ (Fig. 63), die untere Breite cd = 11′ die Höhe h = 3′ und die untere Länge gk = 12′ gegeben ist?

Auflösung: Eine Appareille kann als ein dreiseitiges schief abgeschnittenes Prisma betrachtet werden, und man hat daher nach §. 107:

$$F = \frac{ab + cd + ef}{3} \cdot \frac{gk.h}{2}$$

$$F = \frac{8 + 11 + 8}{3} \cdot \frac{12.3}{2} = 9.6.3 = 162^{c'}.$$

8) Wie viel Kubikfuß Erde sind aus dem Graben einer Horizontalbatterie von zwei Scharten auszuheben, wenn die obere Länge des Grabens ab = 52′ (Fig. 64), die obere Breite bk = 34′ und alle Böschungsanlagen de = df = cg, so wie die Tiefe des Grabens h = 4′ gegeben sind.

Auflösung: Nach §. 111 ist:

$F = (2.52.34 + 2.44.26 + 52.26 + 34.44)\frac{4}{6}$

$F = \frac{2}{3}.8\,(13.34 + 11.26 + 13.13 + 11.17)$

$F = \frac{16}{3}.1084 = 5781\frac{1}{3}^{c'} = 3^{c^0}\,597\frac{1}{3}^{c'}$; oder, wenn man die Anzahl der Kubikfuße durch 144 dividirt:

$F = \frac{576^1}{144}$ Schachtruthen $576^{c''} = 40$ Schachtr. 21 Kubikf. 576 Kubikz.

9) Wie groß ist die Oberfläche O und der Inhalt F einer Kugel bei einem Durchmesser von 4,50″?

Auflösung: Die Oberfläche ist $= d^2\pi$ (§. 118), daher:

$O = 4{,}5^2 . 3{,}14159 = 63{,}6172\square'' = 63\square'' \; 89\square'''$.

$F = \frac{d^3\pi}{6}$ (§. 118.3), daher:

$F = \frac{4{,}5^3 . 3{,}14159}{6} = 47{,}7129^{c''} = 47^{c''} \; 1231{,}9^{c'''}$.

10) Man soll den Inhalt x eines Körpers aus seinem Gewicht m bestimmen, wenn man weiß, daß 1 Kubikf derselben Masse n Pfd. wiegt.

Auflösung: Da sich bei Körpern von gleichen Massen die Inhalte wie die Gewichte verhalten, so ist:

$$x^{c'} : 1^{c'} = m : n$$

$$x = \frac{m}{n}, \text{ d. h.:}$$

„Man findet den Inhalt eines Körpers, wenn man sein Gewicht durch das Gewicht eines Kubikfußes derselben Masse dividirt."

11) Man soll das Gewicht m eines Körpers aus seinem Inhalte F bestimmen, wenn man weiß, daß 1 Kubikfuß derselben Masse n Pfd. wiegt.

Auflösung: $m : n = F^{c'} : 1^{c'}$

$$m = n.F \text{ Pfd., d. h.:}$$

„Man findet das Gewicht eines Körpers, wenn man den körperlichen Inhalt desselben mit dem Gewichte eines Kubikfußes derselben Masse multiplicirt."

12) Ein Munitionskasten ist 8′ 5″ lang, 2′ breit und 1′ 8″ hoch; wie viel loses Pulver faßt derselbe, wenn $1^{c'}$ Pulver 60 Pfd. wiegt?

Auflösung: Der Munitionskasten bildet ein Parallelepipedum, folglich ist sein Inhalt:

$$F = 8\frac{5}{12} . 2 . 1\frac{2}{3} = \frac{101}{12} . 2 . \frac{5}{3} = \frac{101 . 5}{18} = \frac{505^{c'}}{18}.$$

Nennt man nun das gesuchte Gewicht x, so ist:

$1 : \frac{505}{18} = 60 : x$

$x = \frac{505}{3} . 10 = 1683\frac{1}{3}$ Pfd. $= 15$ Ctr. $33\frac{1}{3}$ Pfd.

13) Wie viel Pulver faßt ein Pulvermaß, welches im Lichten 8″ weit und hoch ist, wenn der Kubikfuß Pulver 60 Pfd. wiegt?

Auflösung: Die Pulvermaße bilden cylindrische Räume, mithin ist zunächst der Inhalt F desselben nach §. 113

$F = r^2\pi . h = 16 . 3{,}14159 . 8^{c'''}$. Drückt man nun das gesuchte Gewicht durch x aus, so ist ferner:

$16.3{,}14159.8 : 1728 = x : 60$

$$x = \frac{3{,}14159.5.8}{9} = 13{,}96262 = 13 \text{ Pfd. } 30{,}8 \text{ Lth.}$$

14) Welche Abmessungen muß ein Pulvermaß erhalten, um 1 Pfd. Pulver, von welchem der Kubikfuß 60 Pfd. wiegt, zu fassen, wenn die Weite desselben gleich seiner Höhe werden soll?

Auflösung: Der Inhalt des Pulvermaßes ist nach §. 113 $= \frac{d^3\pi}{4}$, mithin:

$$\frac{d^3\pi}{4} : 1728 = 1 : 60$$

$$d^3\pi . 15 = 1728$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{1728}{\pi.15}} = 3{,}32'' \text{ hoch und weit.}$$

15) Wenn man die Seele eines 12pfündigen Preuß. Geschützrohrs, welche 6'2,35" lang und 4,54" weit ist, ganz mit Pulver, von welchem der Kubikfuß 60 Pfd. wiegt, anfüllen wollte, wie viel Pulver würde dazu nöthig sein?

Antwt.: 41 Pfd. 25 Lth. 1,45 Quentchen.

16) Wie groß ist der körperliche Inhalt eines 6pfündigen Geschützrohres, wenn 1 Kubikfuß Stückgut 576 Pfd und das Rohr 850 Pfd. wiegt?

$$x^{c'} : 1^{c'} = 850 \text{ Pfd.} : 576 \text{ Pfd.}$$

$$x = 1^{c'} 822^{c''}.$$

17) Wie groß ist der Durchmesser einer 48 pfündigen Kugel, wenn 1 Kubikfuß des dazu verwendeten Eisens 475,5 Pfd. wiegt?

Auflösung: $475{,}5 : 48 = 1728 : \frac{d^3\pi}{6}$

$$d = \sqrt[3]{333{,}147} = 6{,}9323''.$$

18) Wie groß ist der Durchmesser einer 100 pfündigen Kugel, wenn bei gleichem Material der Durchmesser einer 6 pfündigen Kugel 3,46" beträgt?

Auflösung: Es verhalten sich die Inhalte zweier Kugeln, wofür man bei gleichem Material ihre Gewichte setzen kann, wie die Kuben ihrer Durchmesser, daher ist:

$$3{,}46^3 : x^3 = 6 : 100; \quad x = 8{,}838''.$$

19) Der Durchmesser einer 6pfündigen Kugel ist $= 3{,}50''$, und der Kubikfuß Eisen, woraus sie gegossen wurde, wiegt 462 Pfd.; wie groß ist das genaue Gewicht dieser Kugel?

Auflösung: $\frac{3{,}5^3.\pi}{6} : 1728 = x : 462$

$$x = \frac{3{,}5^3\pi.77}{1728} = 6 \text{ Pfd. } \tfrac{1}{4} \text{ Quentchen.}$$

20) Der Durchmesser einer Kugel K ist d, wie groß ist der Durchmesser d' einer n mal so großen Kugel K' ?

Auflösung: $K : K' = 1 : n = d^3 : d'^3$

$$d' = d \sqrt[3]{n}.$$

21) Wie schwer ist eine eiserne Vollkugel, welche genau in die Mündung eines 6pfündigen Kanonenrohrs paßt, dessen Bohrungsdurchmesser 3,60″ beträgt, wenn der Kubikfuß Eisen zu 462 Pfd. angenommen wird?
Antwt.: 6 Pfd. 17 Lth.

22) Man hat ein Stück Holz von der Gestalt eines Parallelepipedums, welches 1½ Pfd. wiegt, 6″ lang, 4″ hoch und 3″ breit ist; wie groß ist das Gewicht eines Kubikfußes von diesem Holze?
Auflösung: $3.4.6 : 1728 = 1\frac{1}{2} : x$

$$x = 36 \text{ Pfd.}$$

23) Wie viel Gewehrkugeln gehen aufs Pfund Blei, wenn ein Kubikfuß Blei 752,74 Pfd. wiegt und der Durchmesser der Kugeln 0,64″ beträgt?
Auflösung: Berechnet man wie viel Loth eine Kugel wiegt, und dividirt mit dem erhaltenen Gewicht in 32 Loth, so giebt das Resultat die verlangte Anzahl Kugeln.

$$\frac{d^3\pi}{6} : 1728 = x : 752{,}74.32$$

$x = 1{,}913329$ Loth; mithin die Anzahl der Kugeln $= \frac{32}{1{,}913329} = 16{,}72477$, also ungefähr 17 Stück aufs Pfund.

24) Ein Hebespiegel zum Steinmörser hat die Gestalt eines Kugelabschnitts, und der Durchmesser seiner Grundfläche beträgt 14,75″, so wie die Stärke desselben $h = 3''$; wie groß ist der körperliche Inhalt und das Gewicht desselben, wenn der Kubikfuß kiefern Holz, woraus derselbe gefertigt ist, 36 Pfd. wiegt?

Auflösung: 1) $F = \frac{\pi . h}{6} (3r^2 + h^2) = \frac{3\pi}{6} (3.7{,}375^2 + 9) =$
$270{,}446^{c''}$.

2) $1728 : 270{,}446 = 36$ Pfd. $: G$; $G = 5$ Pfd. 20,3 Lth.

25) Es soll eine 10pfündige Haubitzkammer gebohrt werden, die vollgestrichen 3 Pfd. Pulver faßt, von welchem der Kubikfuß 60 Pfd. wiegt. Nächstdem soll sich die Länge dieser Kammer zur Weite derselben verhalten wie 2 : 1; wie groß wird man beide Abmessungen annehmen müssen?
Auflösung: Nennt man die Weite x, so ist die Länge $= 2x$ und $F = \frac{x^3\pi}{2}$

$$\frac{x^3\pi}{2} : 1728 = 3 : 60$$

$x = 3{,}80''$ und die Länge $2x = 7{,}60''$.

26) Wenn sich die Weite einer cylindrischen Kammer zu ihrer Länge wie 3 : 5 verhalten soll; welche Abmessungen muß sie bekommen, um 3½ Pfd. Pulver zu fassen?

Auflösung: Da gegeben $d:h = 3:5$, also $h = \frac{5d}{3}$, so ist der Inhalt dieser Kammer $= \frac{d^2 \pi h}{4} = \frac{5d^3\pi}{12}$. Man hat also:

$$\frac{5d^3\pi}{12} : 1728 = 3\tfrac{1}{2} : 60$$

$$d = 4{,}254'' \text{ und } h = 7{,}09''.$$

27) Wie groß ist der Durchmesser einer eisernen 6pfündigen Kugel, wenn das specifische Gewicht des Eisens, woraus sie gegossen wurde = 7, und das absolute Gewicht eines Kubikfußes destillirten Wassers zu 66 Pfd. angenommen wird?

Auflösung: Man erhält das absolute Gewicht eines Kubikfußes Eisen, wenn man das specifische Gewicht desselben mit 66 multiplicirt; dies giebt 462 Pfd. Nun aber ist:

$$\frac{d^3\pi}{6} : 1728 = 6 : 462$$

$$d = 3{,}50''.$$

28) Wie groß muß die Seite des kubischen Pulverkastens zu einer Fladdermine gemacht werden, um 20 Pfd. Pulver zu fassen?

$$x^3 : 1^3 = 20 \text{ Pfd.} : 60 \text{ Pfd.}$$

$$x = 8{,}319''.$$

Anmerkung. Kuben sind ähnliche Körper, und die Inhalte ähnlicher Körper verhalten sich, wie die 3ten Potenzen ihrer gleichliegenden Kanten, Höhen, Diagonalen und Durchmesser.

29) Wie schwer ist eine 50pfündige Bombe, wenn ihr äußerer Durchmesser $D = 10{,}68''$, der innere $d = 7{,}12''$, die obere Mundlochweite $m = 1{,}54''$, die untere $n = 1{,}48''$, so wie die Höhe des Mundlochs $h = 1{,}25''$ beträgt, und der Kubikfuß Eisen zu 478,7 Pfd. angenommen wird?

Auflösung: Nennt man das Gewicht G und den körperlichen Inhalt der Bombe K, so ist:

$K : 1728 = G : 478{,}7$ und $G = \frac{K \cdot 478{,}7}{1728}$. Nun ist aber:

$$K = \frac{D^3\pi}{6} - \left[\frac{d^3\pi}{6} + \frac{h\pi}{3}\left(\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{m}{2}\cdot\frac{n}{2}\right)\right].$$

Setzt man in diese Formel die gegebenen Werthe, so findet sich G = 123 Pfd. 23 Loth.

30) Wie schwer ist die 50pfündige Bombe, wenn dieselbe ganz mit Blei ausgegossen wird, und der Kubikfuß Blei 752,74 Pfd. wiegt?

Anwt.: Das zum Ausgießen nöthige Blei wiegt 82,302 Pfd.; mithin beträgt das Gewicht der ausgegossenen Bombe 207,024 Pfd.

Achtes Kapitel.

Von der Berechnung der Kugelhaufen.

§. 120. Stellt man Kugeln von gleichen Durchmessern in regelmäßige Haufen zusammen, so bilden ihre Grundflächen entweder Rechtecke oder Quadrate, oder gleichseitige Dreiecke. Im erstern Falle nimmt der ganze Haufen die Gestalt eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas (dachförmiger Haufen Fig. 65. I), im zweiten die einer vierseitigen (Fig. 65 II), und im dritten Falle die einer dreiseitigen (Fig. 65. III) regulären Pyramide an. Die beiden letzten Kugelhaufen kann man jedoch ebenfalls als abgekürzte Prismen berechnen, und man hat, die Kugel als Gemäß des Haufens betrachtend, gefunden, daß, wenn die Zahlen m und n die Anzahl der Kugeln in den Kanten der Grundschicht ausdrücken, die Anzahl Kugeln K der Haufen sich durch folgende Formeln ergiebt:

1) Beim länglichen oder dachförmigen Haufen:

$$K = \frac{(3m - n + 1)(n + 1)n}{6}.$$

2) Beim vierseitigen Haufen:

$$K = \frac{(2n + 1)(n + 1)n}{6}.$$

3) Beim dreiseitigen Haufen:

$$K = \frac{(n + 2)(n + 1)n}{6}.$$

§. 121. Aufgabe. Es ist die Anzahl der Kugeln in einem dreiseitigen unvollständigen Kugelhaufen zu berechnen, wenn $n = 18$ und in der Grundkante des fehlenden Pyramidenstücks 8 Kugeln liegen würden.

Auflösung: Nennt man die Anzahl der Kugeln in der Grundkante des fehlenden Pyramidenstücks n', so erhält man die Anzahl der Kugeln in dem abgekürzten (unvollständigen) Kugelhaufen:

$$K = \frac{(n + 2)(n + 1)n}{6} - \frac{(n' + 2)(n' + 1)n'}{6}$$

$K = \frac{1}{2}(20 . 19 . 18 - 10 . 9 . 8) = 20 . 19 . 3 - 5 . 3 . 8 =$
$K = 1140 - 120 = 1020$ Kugeln.

§. 122. **Aufgabe.** Es sind K Kugeln gegeben, und in einen dreiseitigen Kugelhaufen zu setzen; wie viel Kugeln kommen in die Seite der Grundschicht zu liegen?

Auflösung: Man setze $K = \frac{(n+3)(n+1)n}{6}$ und entwickele aus dieser Gleichung n. Man erhält aber: $6k = n^3 + 3n^2 + 2n$ d. i. eine vollständige kubische Gleichung, deren Auflösung in den Anfangsgründen nicht vorgetragen werden konnte. Im Practischen erhält man jedoch das verlangte Resultat weit schneller, wenn man die Summanden $3n^2 + 2n$ gänzlich außer Acht läßt, und sodann aus der Gleichung $6K = n^3$ den unbekannten Werth n berechnet. Alsdann ist aber 6K um $3n^2 + 2n$ zu groß, und es wird demnächst auch n zu groß gefunden, und zwar meistentheils gerade um eine Kugel, welcher Fehler sich jedoch leicht schätzen und wie nachstehend berichtigen läßt.

Beispiel. Man soll 394 Kugeln in einen dreiseitigen Haufen setzen; wie viel Kugeln kommen in die Seite der Grundschicht?

$6K = n^3$, also $n = \sqrt[3]{6 . 394} = \sqrt[3]{2364} = 13{,}32$, wobei der Bruch 0,32, da man nur ganze Kugeln hat, unberücksichtigt bleibt.

Substituirt man nun den für n gefundenen Werth in die Formel:

$$K = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}, \text{ so ist:}$$

$$K = \frac{15 . 14 . 13}{6} = 455;$$

gegeben waren aber nur 394 Kugeln, mithin kann n nicht $= 13$, sondern 12 angenommen werden. Alsdann aber ist:

$$K = \frac{14 . 13 . 12}{6} = 364 \text{ Kugeln,}$$

so daß noch $394 - 364 = 30$ Kugeln übrig bleiben, die sich mit den übrigen Kugeln nicht in einem Haufen vereinigen lassen. Setzen wir aber aus den übrig gebliebenen 30 Kugeln einen zweiten Haufen, so ist:

$$n = \sqrt[3]{6 . 30} = 5 \text{ Kugeln.}$$

Diesen Werth in die Formel gesetzt, giebt einen Haufen von 35 Kugeln, mithin ist $n = 4$ anzunehmen, welcher Werth einen Haufen von 20 Kugeln liefert. Es bleiben daher

abermals 10 Kugeln übrig, wozu man aufs Neue n such kann. Alsdann ist:

$$n = \sqrt[3]{60} = 3,$$

und dieser Werth entspricht sogleich der Aufgabe, denn es i

$$K = \frac{5.4.3}{6} = 10.$$

Man kann also aus den gegebenen 394 Kugeln drei drei seitige Kugelhaufen bilden, nämlich zu 364, zu 20 und z 10 Kugeln.

§. 123. Aufgabe. Es sind 1000 Kugeln gegeben; man soll dieselben in einen dachförmigen Haufen setzen.

Auflösung: Da in der Formel m und n als unbekannte Werthe erscheinen, so erhält man eine höhere unbestimmte Gleichung, deren Auflösung auf elementarem Wege nur dadurch geschehen kann, daß man für m oder für n einen bestimmten Werth annimmt. Nehmen wir daher in der Breite der Grundschicht 5 Kugeln an, so ergiebt sich die Länge m wie folgt:

$$1000 = \frac{(3m - n + 1)(n + 1)n}{6}$$

$$1000 = \frac{(3m - 5 + 1)(5 + 1)5}{6}$$

$$1000 = (3m - 4)5 = 15m - 20$$

$$1020 = 15m$$

$$m = \frac{1020}{15} = 68 \text{ Kugeln.}$$

§. 124. Aufgabe. Es sind 1000 Kugeln gegeben, man soll dieselben in einen vierseitigen Haufen setzen.

Auflösung: $K = \frac{(2n + 1)(n + 1)n}{6}$

$$6K = 2n^3 + 3n^2 + n$$

$$2n^3 = 6K$$

$$n = \sqrt[3]{3000} = 14.$$

Nun giebt $K = \frac{(28 + 1)(14 + 1)14}{2.3} = 1015$ Kugeln, mithin ist n zu groß. Setzt man dagegen $n = 13$, so ist $K = 819$ Kugeln, mithin bleiben 181 Kugeln übrig, die sich mit den übrigen Kugeln nicht in einen Haufen setzen lassen.

Dritte Abtheilung.

Das practiſche Aufnehmen ohne Winkelmeß-Inſtrumente.

Neuntes Kapitel.

Aufgaben des practiſchen Feldmeſſens.

§. 125. Will man von einem Theile der Erdoberfläche eine Zeichnung entwerfen, ſo daß ſich aus derſelben die Größe und richtige Lage aller aufgezeichneten Terrain-Gegenſtände, mittelſt eines verjüngten Maßſtabes abnehmen läßt, ſo muß man das zu zeichnende Stück Land zuvörderſt ausmeſſen. — Zu dieſem Ausmeſſen kann man verſchiedene Aufnehme-Inſtrumente benutzen, ſo wie, in deren Ermangelung, Meßſtäbe und die Meßkette. Wendet man jedoch zum Ausmeſſen nur allein Meßſtäbe und die Meßkette an, ſo wird das Aufnehmen ſehr mühſam und zeitraubend, und gewährt nächſtdem, wenn das aufzunehmende Terrain von größerer Ausdehnung und uneben iſt, keine genügende Genauigkeit.

Beim Aufnehmen mit der Kette mißt man von der aufzunehmenden Figur ſo viele gerade Linien, als zu deren Conſtruction nöthig ſind, und entwirft demnächſt, aus dieſen Linien, ein der Wirklichkeit ähnliches Bild nach dem verjüngten Maßſtabe.

Eine im verjüngten Maßſtabe von einem Theile der Erdoberfläche entworfene Zeichnung, wird ein Plan genannt.

§. 126. Für jede Aufnahme iſt zunächſt ein verjüngter Maßſtab zu entwerfen. Im §. 104. 6 haben wir bereits das Nöthige über die Anfertigung deſſelben mitgetheilt und gleichzeitig bemerkt, daß jede Länge, welche kleiner als die normalmäßige Ruthe iſt, als Gemäßeinheit für den verjüngten Maßſtab

angenommen werden kann. Gewöhnlich drückt man aber das Verhältniß des verjüngten Maßstabes zu dem der natürlichen Größe durch bestimmte Zahlen aus, d. h. man nimmt einen bestimmten Theil der wirklichen Ruthe, z. B. $\frac{1}{25000}$, $\frac{1}{100000}$ u. s. w. als Ruthe für den verjüngten Maßstab an.

Bei den Landesvermessungen des Königlich Preußischen topographischen Bureaus wird das Verhältniß des verjüngten Maßstabes zur natürlichen Größe wie $\frac{1}{25000}$ angenommen, d. h. 25000 Ruthen des verjüngten Maßstabes geben die Länge von einer wirklichen Ruthe.

Für Manöver-Pläne ist dagegen ein Maßstab von $\frac{1}{12500}$ am geeignetsten. Bei diesem Maßstabsverhältniß gehen 16 Dezimalzolle auf 10000 Schritt = 1 Meile, mithin auf einen Zoll 10000 : 16 = 625 Schr. = 125°. Trägt man also von einem Normalmaßstabe einen Dezimalzoll ab, und theilt denselben in 25 gleiche Theile, so giebt jeder dieser Theile 25 Schritte des verjüngten Maßstabes an.

Bei ökonomischen Vermessungen bedient man sich gewöhnlich folgender Maßstabsverkleinerungen:

1 dc. Zoll natürlicher Größe = 25° = 2500 Zoll, oder
1 dc. Zoll " " = 30° = 3000 Zoll des verjüngten Maßstabes.

Bei der letzten Verkleinerung ist also das Verhältniß des verjüngten Maßstabes zur natürlichen Größe wie 1 : 3000, oder 3000 Fuß des verjüngten Maßstabes betragen 1 Fuß der natürlichen Größe.

Die Fig. 66 zeigt einen Schrittmaßstab, welcher nach dem Verhältniß $\frac{1}{12500}$ angefertigt ist.

§. 127. Aufgabe. Man soll eine gerade Linie AB abstecken, deren Endpunkte so liegen, daß man von dem einen nach dem andern eine freie Aussicht hat.

Ausführung: Man stecke in jedem Endpunkt der geraden Linie AB (Fig. 67) eine Meßfahne (auch Flagge genannt), oder einen Stab lothrecht ein, und stelle einen Gehülfen zwischen A und B, etwa in C auf, welcher, wenn sich der Einrichtende in A befindet, Front gegen A macht, und in der ausgestreckten rechten Hand eine Flagge lothrecht hält.

Hierauf visirt der Einrichtende mit einem Auge längs der auf einerlei Seite liegenden Kanten der Flaggenstäbe, und richtet die Flagge C in diese Visirlinie ein, indem er durch Seitwärtswinken mit der Hand angiebt, ob dieselbe rechts oder links gerückt werden soll. Steht aber die Flagge in C richtig, so daß sich dieselbe mit den übrigen Flaggen-Stäben genau deckt, so winkt er mit der Hand niederwärts. Sollen noch mehrere Flaggen in der Linie AB oder in deren Verlängerung (Alignement) eingerichtet werden, so geschieht dies auf gleiche Weise.

§. 128. **Aufgabe.** Man soll eine gerade Linie abstecken, zwischen deren Endpunkten A und B (Fig. 68) ein erhöhter Gegenstand, z. B. ein Berg liegt.

Ausführung: Man bezeichne die Endpunkte A und B der Linie AB durch Flaggen, und stelle in den nicht zu nahe an einander liegenden Zwischenpunkten a und b, von welchen aus die Punkte A und B gesehen werden können, zwei Mann auf. Von diesen richtet der in a den in b aufgestellten nach B ein, so daß b nach b′ zu stehen kommt und ab′B eine gerade Linie bildet. Mittelst desselben Verfahrens richtet alsdann b′ den Mann in a nach a′ ein, so daß A, a′ und b′ in gerader Linie liegen. Auf gleiche Weise richtet wiederum a′ den b′ nach b″, und demnächst der b″ den a′ nach a″ ein, in welcher Art fortzufahren ist, bis sich beide in der Linie AB selbst befinden, welches der Fall sein wird, wenn die Visirlinie a‴ b‴ durch B und die Visirlinie b‴ a‴ durch A geht.

§. 129. **Aufgabe.** Man soll eine auf dem Felde abgesteckte gerade Linie, z. B. AB (Fig. 67) ausmessen.

Hierzu sind an Meßgeräthschaften nöthig:

1 Meßkette*),
2 Kettenstäbe und
10 Markirstäbchen**).

*) Die Meßkette ist 5 Ruthen lang und besteht aus Gliedern von starkem Eisendraht, welche durch messingene Ringe mit einander verbunden sind. Die Länge eines jeden Gliedes beträgt von Mitte zu Mitte der Verbindungsringe 1 dc. Fuß. Außerdem sind noch an der Kette halbe und ganze Ruthen durch größere rhomboidalische Ringe bezeichnet. An den Enden der Kette befinden sich Endringe zur Aufnahme der Kettenstäbe, mittelst welcher die Kette angespannt und gezogen wird.

**) Die Markirstäbchen sind hölzerne, 12″ lange, unten mit einem

Ausführung: Man theile zwei Gehülfen, No. 1 und No. 2, als Kettenzieher ab, so daß No. 1 das Einrichten der Kette in die Linie AB und das Sammeln der Markirstäbchen, welche No. 2 beim Messen ausstekt, übernimmt. Für die gesicherte Aufbewahrung dieser Stäbchen hängt No. 1 die lederne Kettenkapsel und dagegen No. 2 die Markirstäbchenkapsel um.

Nachdem die Kette mit den Kettenstäben verbunden worden ist, stellt No. 1 seinen Kettenstab lothrecht in A auf, und verhindert ein Verschieben desselben, indem er die Spitze des Stabes mit dem davor gesetzten rechten Fuß festhält. Sodann wird No. 2 von No. 1 in die Linie AB eingerichtet, wobei No. 2, seinen Kettenstab in der rechten Hand lothrecht haltend, Front geben No. 1 macht. Ist der Kettenstab von No. 2 eingerichtet, so ergreift diese Nummer den Stab am untern Ende, und spannt die Kette in horizontaler Lage dergestalt an, daß sie die von No. 1 bestimmte Linie genau mißt. Giebt hierauf No. 1 ein Zeichen zum Weitermessen, so bezeichnet No. 2 den Stand seines Kettenstabes mit einem Markirstäbchen, und zieht die Kette, in der Richtung nach B fortgehend, hinter sich her. Kommt nun No. 1 am Markirstäbchen von No. 2 an, so ruft er: „Halt", und indem er das Markirstäbchen an sich nimmt, stellt er seinen Kettenstab an den Ort desselben. Hierauf wird die Kette wiederum in die Linie AB eingerichtet und die Messung in der frühern Art bis zum Punkt B fortgesetzt.

Nächstdem ist zu bemerken, daß No. 1, sobald 10 Kettenlängen gemessen worden sind, die gesammelten Markirstäbchen wiederum an No. 2 abgiebt und jede Wechselung der Markirstäbchen notirt werden muß. Hierdurch wird es, da mit jeder Wechselung 50° gemessen worden sind, sehr leicht, die Länge der Linie AC in Zahlen sicher zu bestimmen. Hätte z. B. ein 7maliges Wechseln der Markirstäbchen stattgefunden, und No. 1 noch 3 Stäbchen übrig behalten, und betrüge außerdem am Ende der Messung die Entfernung von No 1 bis zum Punkt B 2° 9′, so würde die Länge der gemessenen Linie $= 7 . 50° + 3 . 5° + 2° 9′ = 367° 9′$ sein.

Anmerkungen.

1) Beide Kettenzieher haben darauf zu achten, daß sich während des Messens die Ringe der Kette nicht verschlingen.

---

eisernen Schuh versehenen Stäbchen, welche dazu dienen, die einzelnen Kettenlängen auf dem Felde zu markiren. Sie werden in einer ledernen Kapsel, welche der vorderste Kettenzieher umhängt, aufbewahrt.

2) Ist das Terrain uneben, so muß die Kette in horizontaler Lage stets so gehalten werden, daß immer nur die geraden Richtungen und nicht die gekrümmten auf der Erdoberfläche gemessen werden.

3) Ist bei der Messung im unebenen Terrain sehr große Genauigkeit nothwendig, so schlägt man in der Vertikal-Ebene von AB mehrere Pfähle ein, und befestigt an den Seiten derselben horizontal gestellte Latten. Die obere Kante dieser Latten giebt alsdann die zu bestimmende horizontale Entfernung von A nach B an.

4) Soll dagegen die horizontale Entfernung der Punkte A und B mit der Kette möglichst genau gefunden werden, so muß die Messung mehrere Male wiederholt werden. Alsdann giebt das arithmetische Mittel aus den einzelnen Messungen die Länge von AB an.

§. 130. **Aufgabe.** Man soll eine krumme Linie auf dem Felde durch Messen von Abscissen- und Ordinaten-Linien aufnehmen (Fig. 69).

Ausführung: Man messe zwischen den Punkten x und y die Theile Aa, ab, bc, cd, de, ef, fg, gh und hk der geraden Linie AB. Hierauf errichte man nach dem Augenmaße in den Punkten a, b, c, e, f, h, k die Normalen aa′, bb′, cc′, ee′, ff′, hh′, kz und schreite deren Längen einzeln ab. Mit Hülfe dieser Linien läßt sich nun die gekrümmte Linie a′ b′ c′ e′ f′ h′ in der Reinzeichnung leicht bilden.

Man nennt die Linie AB, in Bezug auf ihre Theile Aa, ab, bc ꝛc., welche Abscissen heißen, die Abscissenlinie, und die Normalen aa′ bb′ cc′ in ihren Theilpunkten a, b, c Ordinaten.

§. 131. **Aufgabe.** Man soll im Punkt K der geraden Linie mn einen Perpendikel auf dem Felde errichten (Fig. 23).

Ausführung: Auf einer Linie oder Schnur bezeichne man Maße, welche sich wie 3 : 4 : 5 verhalten. (Gewöhnlich bindet man in eine Schnur Knoten, welche 3, 4 und 5 Fuß von einander abstehen). Hierauf legt man den Knoten zwischen 3 und 4 Fuß an einen in K eingeschlagenen Stab, hält die Endpunkte der Maße 3′ und 5′ bei B in der Linie mn fest und zieht den Endpunkt des Maßes 4′ bei C scharf an, so daß die Schnur das Dreieck CKB bildet. Alsdann ist W. CKB = R und CK ⊥ mn (§. 63).

Eine zweite Auflösung ist in §. 49. Nr. 10 enhalten.

§. 132. **Aufgabe.** Man soll einen rechten Winkel auf dem Felde abstecken.

Die Ausführung ist der des §. 131 gleich.

§. 133. Aufgabe. Man soll auf dem Felde im Punkt B der Linie mn (Fig. 23) einen Winkel von 45° abstecken.

Ausführung: Man errichte in dem beliebigen Punkt K der Linie mn eine Normale Ka und mache Ka = KB, so ist Dreieck KaB rechtwinklig und gleichschenklig; mithin W. B = W. a = ¼ R = 45°.

§. 134. Aufgabe. Man soll auf dem Felde im Punkt B der Linie BC (Fig. 25) einen Winkel von 60° abstecken.

Ausführung: Man construire mit der Schnur das gleichseitige Dreieck BDE so ist W. B = W. E = D = ⅓° = 60°.

Anmerkung. Die vorstehende Construction giebt nächstdem einen Winkel von 30°, wenn man eine Seite des gleichseitigen Dreiecks halbirt und den Halbirungspunkt mit der gegenüber liegenden Ecke verbindet.

§. 135. Aufgabe. Man soll durch den Punkt C (Fig. 26) eine Linie parallel AB abstecken.

Ausführung:

1) Man construire wie in §. 49. 13 und bezeichne die Punkte D, E und A durch Stäbe oder Flaggen, oder:
2) Man fälle von C auf AB die Normale Ca und errichte in B die Normale Bb nach §. 49. Nr. 9 und 10, wobei die nöthigen Kreisbogen mittelst einer Schnur zu schlagen sind.

§. 136. Aufgabe. Man soll die Entfernung zweier Punkte auf dem Felde, zwischen welchen sich ein Hinderniß, z. B. ein Teich, Wald, Dorf u. dgl. m. befindet, messen.

Ausführung: Ist AB (Fig. 70) die zu messende Linie, so suche man seitwärts von AB einen Punkt C auf, von welchem aus nach A und B gemessen werden kann. Ist AC und BC gemessen, und die Verlängerung CD = AC, so wie CE = BC gemacht, so wird DE = AB sein §. 40.

§. 137. Aufgabe. Man soll die ungangbare Entfernung AB (Fig. 73), zu deren einem Endpunkt A man nur gelangen kann, messen.

Ausführung: Man verlängere AB um die beliebige Länge AC, nehme seitwärts AC einen Punkt D an, verlängere AD und CD und mache die Verlängerung DF = AD, so wie DE = CD. Nachdem sämmtliche Endpunkte dieser Linie durch Stäbe oder Flaggen bezeichnet worden sind, stelle man sich im Alignement von DB und EF in G auf, und messe die Linie FG, deren Länge = AB sein wird.

Beweis. Δ ACD $\cong$ Δ FED (§. 40) also auch
AC = EF und W. C = W. E
Δ BCD $\cong$ Δ GED (§. 41)
mithin: BC = EG, also auch
BC — AC = EG = EF
d. i. AB = FG

§. 138. Aufgabe. Man soll die ungangbare Entfernung AB (Fig. 74), zu deren Endpunkten A und B man nicht kommen kann, messen.

Ausführung: Man nehme der Linie AB gegenüber einen Punkt c an, von welchem aus die Punkte A und B gesehen werden können, stecke in gerader Richtung ca = cb ab, und bestimme in der Linie Aa den Punkt m und in der Linie Bb den Punkt n beliebig. Hierauf messe man die Linien cm und cn und mache co = cn und cv = cm. Sucht man nun im Alignement cB den Punkt M, welcher gleichzeitig in der Verlängerung von oa liegt, und im Alignement cA den Punkt auf, welcher auch in der Verlängerung von vb liegt, so ist MN = AB.

Beweis. Δ mac $\cong$ Δ cbv daher W. mac = W. vbc
Δ ncb $\cong$ Δ cao W. cbn = W. cao
Δ Mac $\cong$ Δ cBb (§. 41)
daher auch: Mc = Bc.
Δ Nbc $\cong$ Aac
Nc = Ac, mithin auch
Δ MNc $\cong$ ABc (§. 40)
MN = AB.

§. 139. Aufgabe. Man soll die Richtung der Kapitallinie RF des Bastions ECDR (Fig. 71) durch Rechnung bestimmen.

Ausführung: Man wähle in der Verlängerung der Facen CE und CD, die Stationspunkte A und B und messe die Linien AC, AB und BC. Auf einem Stück Papier entwerfe man die Figur ECDAB und bezeichne den gesuchten Durchschnittspunkt der Linie CF in AB einstweilen mit F. Alsdann läßt sich die Entfernung AF = x, nach §. 93, leicht berechnen, denn man hat:

$$AC : CB = x : FB$$
$$AC + CB : AC = x + FB : x$$
$$AC + CB : AC = AB : x$$
$$x = \frac{AC \cdot AB}{AC + CB}.$$

Beiſpiel. Wie weit liegt der Punkt F in der Kapitallinie von A ab, wenn

AB = 870,7 Schritt.
AC = 820,9 „
CB = 765 „ iſt?

Antw.: AF = x = 450,7 Schritt.

Schreitet man nun 450,7 Schritt von A nach B ab, ſo erhält man den Punkt F in der Kapitallinie CF.

Anmerkung. Iſt man verhindert die Entfernungen CA und BC direct zu meſſen, wie z. B. vor einer belagerten Feſtung, ſo ſtellt man ſich außerhalb der wirkſamen Schußweite mit einem Winkelmeßinſtrumente in A und B auf, und mißt die Winkel CAB und CBA, ſo wie die Länge AB. Aus dieſen Stücken läßt ſich alsdann AC und BC trigonometriſch berechnen, und demnächſt der Punkt F, wie vorſtehend bemerkt wurde, finden.

§. 140. Aufgabe. Die Stärke AB der Bruſtwehr einer Breſchbatterie (Fig. 72) beträgt 12′, die vordere Oeffnung der Scharte DE = 7′ und die hintere ab = 2′; wie weit liegt der Punkt C, wo ſich die verlängerten Schartenbacken Da und Eb ſchneiden, von der Flucht MN der Batterie ab?

Auflöſung: Entwirft man ſich den Bedingungen der Aufgabe gemäß die Zeichnung (Fig. 72), ſo iſt die Länge AC zu beſtimmen. In den Dreiecken CDB und CaA findet aber unter den Seiten nach §. 90 folgende Proportion ſtatt:

$$AB+AC:AC = DB:aA,$$
$$12+AC:AC = 3\tfrac{1}{2}:1$$
$$12+AC-AC:AC = 3\tfrac{1}{2}-1:1$$
$$12:AC = 2\tfrac{1}{2}:1$$
$$AC = \frac{12.2}{5} = 4\tfrac{4}{5}' = 4'\ 9{,}6''\ \text{ddc. M.}$$

§. 141. Aufgabe. Man ſoll ein Stück Feld ABCDEF (Fig. 75) aufnehmen.

Ausführung:

1) In den Endpunkten A, B, C, D, E und F der aufzunehmenden Figur ſind Flaggen oder Stäbe auszuſtecken.
2) Iſt ein Eckpunkt oder auch ein Punkt innerhalb der Figur auszuwählen, welcher eine freie Ausſicht nach den übrigen Eckpunkten der Figur geſtattet. Dieſer Punkt ſei C.
3) Man meſſe von C aus ſämmtliche Umfangs- und Diagonallinien der abgeſteckten Figur und beobachte hierbei eine Reihenfolge, welche die wenigſten Umwege nöthig macht.
4) Man entwerfe von der aufzunehmenden Figur eine Brouillon-Zeichnung und trage ſämmtliche Maße in dieſelbe ein.

5) Gleichzeitig mit der Messung der Abscissenlinie AF bestimme man die Länge mehrerer Abscissen und Ordinaten auf AF und entwerfe nach ihnen die gekrümmte Begrenzungslinie AvF. (§. 130).

6) Man messe eine oder auch mehrere Probe-Diagonalen z. B. AE u. BD.

7) Aus den gemessenen Umfangs- und Diagonallinien setze man nach dem verjüngten Maßstabe die Figur ABCDEF auf dem Papiere zusammen. Hierbei würde man zuerst das Dreieck FEC aus den 3 Seiten, nach §. 49. 1, und demnächst über FC das Dreieck AFC und über CE das Dreieck CED, so wie über AC das Dreieck ACB construiren.

8) Zuletzt nimmt man die Maße der Probe-Diagonalen AB und BD in den Cirkel und untersucht, ob dieselben mit den Maßen der entsprechenden Linien in der Zeichnung übereinstimmen. Ist dies der Fall, so kann man sich von der Richtigkeit der Aufnahme überzeugt halten.

Anmerkung. Macht es die Oertlichkeit nothwendig, die Aufnahme von einem innerhalb der Figur liegenden Punkt zu beginnen, so erhält man 2 Dreiecke mehr aufzunehmen, und erspart dagegen das Messen von Probe-Diagonalen, weil sich die Richtigkeit der Aufnahme aus dem genauen Zusammenschließen der aufgetragenen Dreiecke unmittelbar erkennen läßt.

§. 142. Aufgabe. Man soll ein Stück Land, auf welchem sich ein Dorf, Wald, See u. s. w. befindet, aufnehmen z. B. den Wald ABCDEFG (Fig. 78).

Ausführung. Da man im vorliegenden Falle, durch die Beschaffenheit des Terrains, verhindert ist, Diagonalen zu messen, so kann die Figur nur durch Umziehen, d. h. durch Messen der Umfangslinien und durch Bestimmung der Polygonwinkel aufgenommen werden. Dies geschieht mit der Kette wie folgt:

1) Man stelle in den hervortretenden Punkten des Waldsaumes (Lisière) die Flaggen A, B, C, D, E, F und G auf.

2) Man entwerfe von der aufzunehmenden Figur eine Brouillon-Zeichnung.

3) Um den Polygonwinkel bei A zeichnen zu können, verlängere man AG über A hinaus, etwa bis m, messe hierauf die Seiten des Dreiecks Amn und construire dasselbe nach dem verjüngten Maßstabe in der Reinzeichnung. Aus dieser Construction ergiebt sich der Nebenwinkel BAG. Hierauf messe man von A nach B und trage die Länge von AB in der Reinzeichnung nach dem verjüngten Maßstabe ab.

4) Da die Ecke bei B nicht mit Bäumen bewachsen ist, so kann innerhalb der Figur die Seite rs des Dreiecks Brs gemessen werden. Die Construction des Dreiecks Brs über Bs, giebt den Polygonwinkel B. Die gekrümmte Lisière innerhalb des Winkels B, bestimme man durch Abscissen und Ordinaten.
5) Nachdem BC gemessen ist, construire man den Polygonwinkel bei C.
6) Ist CD gemessen, so suche man in der Verlängerung von CD und FE den Punkt o auf. Die Construction des Dreiecks DoE giebt alsdann die beiden Polygonwinkel CDE und DEF.
7) Der Winkel F wird eben so wie die Winkel A und C gefunden.
8) Zur Bestimmung des eingehenden Polygonwinkels G ist das Dreieck pGq abzustecken. Die Construction desselben über Gq nach dem verjüngten Maßstabe giebt den Winkel AGF in der Zeichnung.
9) Das genaue Zusammenschließen der construirten Figur im Punkte A, dient als Kennzeichen für die Richtigkeit der Aufnahme.

Zehntes Kapitel.

Vom Krokiren, Nivelliren und Profiliren.

§. 143. Vom Krokiren.

Krokiren heißt eine Gegend nach dem Augenmaße aufnehmen. Entwirft man nach einer solchen Aufnahme eine Zeichnung im verjüngten Maßstabe, so wird dieselbe ein Krokis genannt.

Soll ein Krokis möglichst zuverlässig ausfallen und einen Terrainabschnitt von größerer Ausdehnung umfassen, so müssen die am meisten hervortretenden Punkte desselben, ehe das Geschäft des Krokirens beginnt, mittelst eines Winkelmeßinstrumentes aufgenommen werden. Auch kann man diese Punkte von einem bereits gefertigten Plane oder von einer Specialkarte entnehmen, und solche, nach dem für das Krokis bestimmten Maßstab, auf ein Krokirblatt abtragen. Die Anfertigung eines Krokis bezweckt gewöhnlich die Vervollständigung oder Berichtigung eines Planes hinsichts der für militairische Zwecke nöthigen Details.

Ein gutes Krokis muß, so weit solches der zum Grunde

gelegte verjüngte Maßstab zuläßt, ein möglichst deutliches Bild von der Gestaltung des Terrains abgeben. Es muß daher die Berge *) mit ihren Böschungen, Kuppen, Schluchten und Thalrändern bildlich richtig darstellen, so wie auch sämmtliche Gewässer, Gräben, Sümpfe, Wiesen, Gärten, Wege, Waldpartien, Ortschaften und einzeln stehende Gehöfte u. s. w. enthalten. Beträgt der Maßstab $\frac{1}{12500}$ der natürlichen Größe, so lassen sich die genannten Gegenstände sämmtlich noch deutlich in der Zeichnung ausdrücken, was jedoch bei einem halb so großen Maßstab, nämlich $\frac{1}{25000}$, schon schwieriger wird.

§. 144. **Aufgabe.** Es soll ein Dorf und seine nächste Umgegend (Fig. 81) in einem Maßstabe von $\frac{1}{12500}$ krokirt werden.

Ausführung:

1) Man entwerfe zunächst einen Schrittmaßstab in der vorgeschriebenen Größe nach §. 104. 6 und §. 126.
2) Auf ein Krokirblatt sind die wichtigsten Punkte des zu krokirenden Terrainabschnitts von einem Plane abzutragen, oder mittelst eines Winkelmeßinstruments zu bestimmen. Diese Punkte mögen in unserem Beispiele der Kirchthurm A, die Windmühle B, die Schäferei C und die Richtung der Chaussee DE sein.
3) Werden die Punkte A, B, C, D und E mittelst einer besondern Aufnahme bestimmt, so ist gleichzeitig die Richtung der Mittagslinie, d. i. eine von Norden nach Süden laufende gerade Linie, mittelst einer Boussole zu ermitteln. Trägt man aber diese Punkte von einem Plane ab, so giebt derselbe auch die Richtung der Mittagslinie an.
4) Parallel mit der Mittagslinie ziehe man RM als westliche Begrenzungslinie des Krokis, und mache diese Linie nach dem zum Grunde gelegten Maßstab so lang, als die Ausdehnung des Krokis erfordert. Alsdann ist über RM das Rechteck MNQR, welches das Dorf nebst Umgegend umfaßt, zu construiren.
5) Hierauf sind auf den Seiten des Rechtecks RMNQ Längen von 200, 300 oder 400 Schritt abzutragen und deren correspondirende Endpunkte durch gerade Linien zu verbinden, so daß das ganze Rechteck in lauter gleiche Quadrate getheilt wird. Diese Quadrate ziehe man, damit sie sich besser marquiren und von den

*) Das Krokiren der Berge setzt einige Uebung im Aufnehmen, so wie theoretische Kenntnisse in der Terrainlehre und im Planzeichnen voraus. Aus diesem Grunde kann dasselbe hier nicht speciell abgehandelt werden.

andern Linien unterscheiden mit rother Tinte aus. In der Figur sind die Seiten dieser Quadrate, bei einem Maßstabe von $\frac{1}{12500}$, zu 300 Schritt angenommen worden.

6) Nachdem das Krokirblatt in der vorbemerkten Art entworfen und auf ein Stück Pappe, oder auf ein Krokir-Planchet befestigt worden ist, beginne der Aufnehmer das Geschäft des Krokirens von einem bereits im Krokirblatte festgelegten, und in der Natur besonders hervortretenden freien Punkte, z. B. von dem mit D bezeichneten Meilenstein westlich an der Chaussee.

7) In D angekommen, orientire der Aufnehmer sein Krokirblatt dergestalt, daß die Linie DE mit der entsprechenden Linie in der Natur in eine und dieselbe Verticalebene fällt. Hierauf schreite*) derselbe, möglichst in gerader Richtung fortgehend, die Entfernung Da bis zum Feldgraben ab ab, und zeichne dieselbe in sein Krokir-Brouillon ein. Dieses Einzeichnen kann ohne Zirkel und Maßstab mittelst der Quadrate geschehen; denn beträgt die Entfernnng Da 950 Schritt, so giebt dies 3½ Quadratlängen, und der Punkt a kann daher ohne Weiteres im Brouillon bestimmt werden. Schätzt man nun den W. bac nach dem Augenmaße und schreitet die Länge des Grabens ab ab, so kann auch die Linie ab in das Brouillon eingezeichnet werden. Im Punkt b deutet man zugleich die Richtung des Feldgrabens bg an. Auf gleiche Weise bestimmt sich in c der Eingang in das Dorf und demnächst die Richtung des Weges cA, indem man von c eine gerade Linie nach dem bereits im Krokis eingezeichneten Kirchthurm A zieht. Im Punkt c zeichne man ferner den südlich von der Chaussee abgehenden Weg cd, so wie das an diesem Wege gelegene Gehöft ein. Den Umriß der Gehöfte sucht man sich durch das Umgehen derselben zu verschaffen, wobei im Allgemeinen das Verfahren des §. 142, jedoch mit dem Unterschiede in Anwendung kommt, daß im vorliegenden Falle die Umfangswinkel nur durch Abschätzen bestimmt werden.

8) Hierauf beginne der Aufnehmende die Krokirung des Dorfes, und schreite zu diesem Ende, auf der Linie cA fortgehend, zu beiden Seiten des Dorfweges die einzelnen Gehöfte ab. Gleichzeitig bestimme derselbe die Richtung der nach außen führenden Wege

*) Damit der Schüler sich die Größe eines geometrischen Schrittes aneigne oder doch wenigstens das Verhältniß seines Schrittes zum geometrischen Schritt kennen lerne, so sind mit der Meßkette Entfernungen von 100 Schritt abzustecken und wiederholt abzuschreiten. Diese Uebung auf weitere Entfernungen ausgedehnt, giebt zugleich ein Mittel ab, Entfernungen nach dem Augenmaße schätzen zu lernen.

und umgehe zuletzt das Dorf in seiner äußern Einfassung. Kleine Häuser und Gärten bleiben hierbei unberücksichtigt.

9) Zur Vollendung des Krokis auf der Westseite ist zunächst der Weg Af, so wie die Entfernung des Teiches von der Schäferei C abzuschreiten. Hierdurch erhält man die Lage des südlichen Teichufers. Ferner bestimme man die Entfernung des Grabens mg von C und demnächst dessen Lage nach dem Augenmaße. Der Durchschnittspunkt g der beiden Gräben mg und bg ergiebt sich alsdann von selbst.

10) Von C begebe sich der Aufnehmende nach der Windmühle in B. Hier angekommen orientire er sein Krokirblatt dergestalt, daß die Linie BA des Krokis mit der Linie BA in der Natur in eine und dieselbe Verticalebene fällt. Hierauf sind die Visirlinien Bn, Bs, Bv, Bq und Bo, welche die Richtung des Weges Bn, so wie die Lage der Punkte s, q, v und o andeuten, zu ziehen. Durch Abschreiten von B nach s und q, oder durch das Schneiden der gezogenen Visirlinien von andern Punkten aus, findet man die Lage dieser Punkte im Krokis, so wie die Lage und Länge der Linie vs durch Abschätzen des Winkels vsB im Punkt s.

11) Nachdem die Gehöfte bei o krokirt worden sind, schreite der Aufnehmer zur Bestimmung der Krümmungen des nördlichen Flußufers, wobei Abscissen und Ordinaten mit Vortheil in Anwendung gebracht werden können.

Um Wiederholungen zu vermeiden, bleibt dem Schüler die weitere Ausführung des Krokis nach den vorstehenden Andeutungen überlassen. Die Hauptbedingung für die Erzielung eines richtigen Terrainbildes besteht beim Krokiren hauptsächlich in dem richtigen Schätzen und Auftragen der Winkel. Der Aufnehmende, welcher es hierin zu einem gewissen Grade von Fertigkeit bringen will, muß ein guter Terrain-Zeichner sein, und nächstdem ein richtiges Augenmaß besitzen.

§. 145. Vom Nivelliren und Profiliren.

Nivelliren heißt untersuchen, um wie viel ein Theil der Erdoberfläche höher liegt als ein anderer. Mittelst eines Nivellements ermittelt man daher das Steigen und Fallen eines unebenen Terrains, dessen Höhenunterschiede aber nicht zu beträchtlich sind.

Man kann sich zum Nivelliren verschiedener Instrumente, und unter andern auch des Meßtisches, so wie der Setzwage, in Verbindung mit Nivellir-Maßstäben, bedienen. Am häufigsten wird jedoch die sogenannte Kanalwage, bei welcher die einfachste Manipulation stattfindet, angewendet. Dieselbe besteht

aus einer cylinderförmigen Röhre ab von Meſſing- oder Eiſenblech (Fig. 79), die an jedem Ende mit einem rechtwinklig aufgerichteten Knie ac und bc verſehen und ſo eingerichtet iſt, daß ſie, auf ein Stativ (dreifüßiges Geſtell) geſteckt, ſich um den Zapfen d deſſelben herumbewegen läßt. Auf den Knieen ſind gläſerne, offene Cylinder aufgekittet.

Beim Gebrauche füllt man die Kanalwage bis etwa zur Mitte der gläſernen Cylinder mit Waſſer an. Die beiden Waſſerſpiegel in den Cylindern cc werden alsdann in einer und derſelben horizontalen Ebene liegen, weil die Oberfläche eines ſtillſtehenden Waſſers als eine horizontale Ebene anzuſehen iſt. Die Viſirlinie cc, welche genau beide Waſſerſpiegel berührt, wird daher ebenfalls eine horizontale Lage haben müſſen.

Außerdem gehören zu einem vollſtändigen Nivellirapparat zwei Nivellir-Maßſtäbe, von denen jeder mit einer zum Verſchieben eingerichteten Tafel (Zielſcheibe), deren Mitte durch eine Bezeichnung hervortritt, verſehen iſt. Gewöhnlich ſind dieſe Tafeln, auf deren Rückſeite ſich ein Zeiger befindet, welcher beim Gebrauche die Fuße, Zolle und Linien vom untern Ende des Maßſtabes bis zur Mitte der Tafel angiebt, mit zwei weißen und zwei ſchwarzen Feldern bezeichnet (Fig. 80).

§. 146. Aufgabe. Es ſoll eine Gegend nach der Linie AB nivellirt werden, d. h. man ſoll angeben, um wie viel die Punkte D, F, G, B u. ſ. w. höher oder tiefer liegen, als der Punkt A. (Fig. 76).

Ausführung:

1) Man ſtecke die Linie AB ab, und nehme die Höhe des Punktes A gleich Null an.

2) Zwiſchen den beiden Punkten A und D, deren Gefälle zunächſt beſtimmt werden ſoll, ſtelle man die Kanalwage im Punkt C auf. Gleichzeitig laſſe man in der Verticalebene AB über A und D Nivellirmaßſtäbe ſenkrecht aufrichten und die Zielſcheiben an denſelben ſo weit erhöhen, bis ihre Mitten nn von der Viſirlinie, welche der Stand des Waſſers in den Cylindern angiebt, geſchnitten werden. Zieht man nun die Länge Dn des Maßſtabes in D von der Länge An des Maßſtabes in A ab, ſo giebt der erhaltene Unterſchied an, um wie viel D höher liegt als A; denn Ad ∥ nn, mithin An = dn und An — Dn = dD.

Der Punkt C darf füglich nicht über 150 Schritt von A und D entfernt liegen, weil bei einer größeren Entfernung die Mitten der Tafeln nicht mehr scharf gesehen werden können. Bedient man sich jedoch zum Nivelliren eines Nivellirinstrumentes mit Fernrohr, so nimmt man die Längen AC und CD = 1000 Schritt und darüber an. Bei Nivellements von größerer Ausdehnung, wie solche z. B. bei der Anlage von Eisenbahnen stattfinden, wird man folglich nicht die Kanalwage, sondern Nivellirinstrumente mit Fernröhren in Anwendung bringen.

3) Als zweiten Stations-Ort der Kanalwage wähle man den Punkt E und bestimme Fn — Dn', welche Differenz den Fall des Terrains von D nach F angiebt. Als dritten Stationspunkt wähle man K, und messe die Steigung von F nach G mittelst der Differenz Fn' — Gn. Zuletzt stationire man die Kanalwage in B und bestimme bB = Gn' — h, wenn h die Höhe der Kanalwage bis zu ihrem Wasserspiegel bedeutet.

4) Im Brouillon bemerke man die durch das Nivellement erhaltenen Maße in folgender Art:

Zeichnung oder Gest.:

An — Dn = 7′ 8″ 9‴ — 3′ 5″ = 4′ 3″ 9‴ } Totalgefälle von F = 8′ 1″ 6‴ — 4′ 3″ 9‴ = 3′ 7″ 7‴.

Fn — Dn' = 9′ 8″ 6‴ — 1′ 7″ = 8′ 1″ 6‴

Fn' — Gn = 10′ 9″ — 2′ 3″ 5‴ = 8′ 5″ 5‴ } Tot. Steigung von G = 8′ 5″ 5‴ — 3′ 7″ 7‴ = 4′ 7″ 8‴

Gn' — h = 6′ 3″ — 4′ 8″ = 1′ 5″ } Tot. Steigung v. B über A = 4′ 7″ 8‴ + 1′ 5″ = 6′ 2″ 8‴.

Noch zweckmäßiger lassen sich die gefundenen Maße, wie folgt, zusammenstellen:

Visirhöhe nach		Partielles Steigen und Fallen der Stationspunkte D, F, G, B.		Totalsteig. o. Gefälle über oder unter dem Punkte A = 0	
rückwärts	vorwärts	Steigen.	Fallen.	Steig.	Gefälle.
An = 7′ 8″ 9‴	Dn = 3′ 5″	+ 4′ 3″ 9‴	—	4′ 3″ 9‴	—
Dn' = 1′ 7″	Fn = 9′ 8″ 6‴	—	— 8′ 1″ 6‴	—	3′ 7″ 7‴
Fn' = 10′ 9″	Gn = 2′ 3″ 5‴	+ 8′ 5″ 5‴	—	4′ 7″ 8‴	—
Gn' = 6′ 3″	h = 4′ 8″	+ 1′ 5″	—	6′ 2″ 8‴	—
26′ 7″ 9‴	20′ 5″ 1‴	14′ 4″ 4‴	8′ 1″ 6‴		

Als Probe für die Richtigkeit der Rechnung summire man die in der vorstehenden Tabelle nach vorwärts und rückwärts bemerkten Visirhöhen, so wie die partiellen Steigungen und Gefälle der Stationspunkte, und sehe nach, ob der Differenzwerth der beiden ersten Summen mit dem Differenzwerth der beiden letzten, so wie mit der Totalsteigung von AB übereinstimmt.

§. 147. Will man von einem Nivellement eine Zeichnung entwerfen, welche die horizontalen Entfernungen der einzelnen Stationspunkte und deren Steigungen oder Gefälle, nach dem verjüngten Maßstabe enthält, so ist zunächst die horizontale Entfernung Ax der beiden Endpunkte A und B auf der Erdoberfläche, nach §. 129, zu messen, oder auch diese Entfernung von einem bereits gefertigten Plane zu entnehmen. Bestimmt man ferner die Entfernungen der einzelnen in der Richtung Ax liegenden Stationspunkte, und trägt solche als Abscissen und dagegen die durch das Nivellement erhaltenen Höhen als Ordinaten auf einer geraden Linie ab, so erhält man das nivellirte Terrain im verticalen Durchschnitte (Fig. 77) dargestellt, und die entworfene Zeichnung wird ein Profilriß oder ein Profil genannt. Gewöhnlich nimmt man den Maßstab für die Höhen, damit solche in der Zeichnung besser hervortreten, bedeutend größer als den für die Horizontallängen an.

§. 148. Aufgabe. Es soll nach der horizontalen Entfernung zweier im Grundriß*) gegebener und nivellirter Punkte A und B (Fig. 76) ein Profil gezeichnet werden.

Ausführung: Man fertige einen Längen- und einen Höhenmaßstab an, und trage auf der geraden Linie Ax das Maß von Ad nach dem Längenmaßstab, so wie auf der Ordinate Dd das entsprechende Maß nach dem Höhenmaßstab ab. Hat man nun beim Nivellement zwischen A und D weiter keine Punkte bestimmt, so verbinde man A und D durch die unbedeutend gekrümmte Linie ACD nach dem Augenmaße. Trägt man nun ferner die Horizontallängen df, fg und gx aus dem Grundriß, und die Ordinaten fF, gG und xB, den Nivellementsmaßen entsprechend, oberhalb und unterhalb der Linie Ax ab, so ergiebt sich, wenn man auch die Punkte D, F, G und B der Gestaltung des Terrains gemäß nach dem Augenmaße mit einander verbindet, das Profil ACDEFKGB.

§. 149. Aufgabe. Es soll das Terrain in der Richtung von A nach B (Fig. 77), behufs der Anlegung einer horizontalen Fläche für Artillerie-Schießübungen, oder auch für eine horizontale Fahrbahn — Eisenbahn — geebnet werden.

*) Unter Grundriß ist hier die Aufnahme des Terrains zu verstehen, in welchem die Punkte A und B liegen.

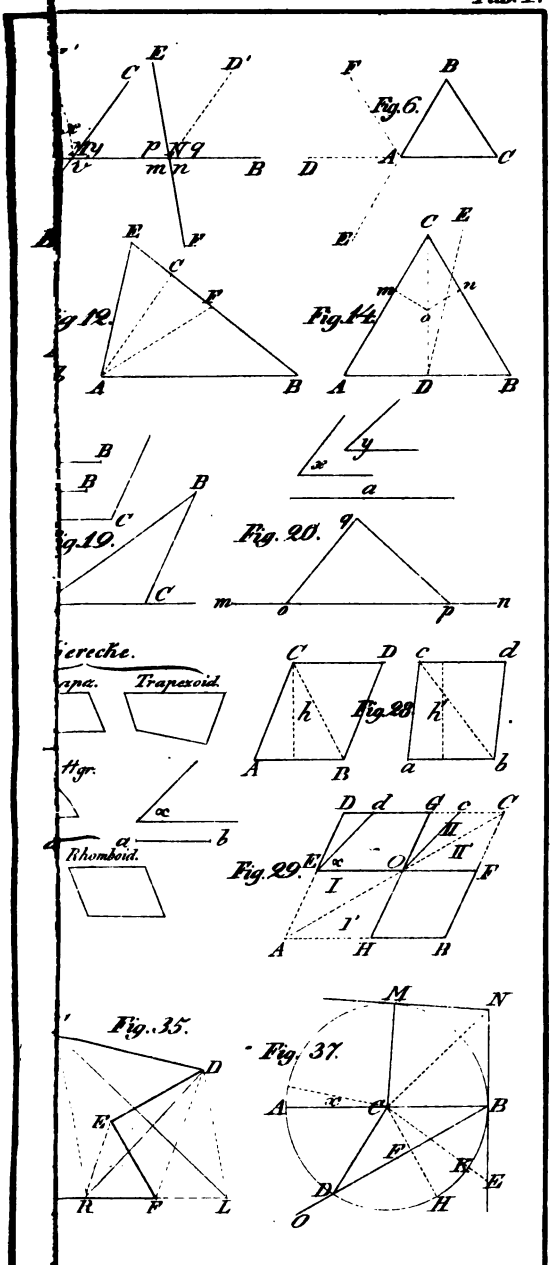
Ausführung: Nachdem die nöthigen Vorarbeiten, bestehend in der Messung der horizontalen Entfernung Ax, der Nivellirung des Terrains zwischen A und B, und der Anfertigung des entsprechenden Profils, ausgeführt sind, pfähle man eine horizontale, mit Ax parallel laufende Linie no, mittelst Maßstab, Setzwage und Schnur, in einer Höhe An von 4′ bis 4½′, ab. Da, wo die Einsenkung des Terrains am Pfahle 5 beginnt, ist es nöthig, neben dem längern Pfahle vo einen kürzern vr einzuschlagen, damit die Pfähle in 5, 6, 7 und 8 dergestalt eingeschlagen werden können, daß ihre Köpfe eine gerade Linie rp bilden. Hat man zuletzt noch eine dritte Abtheilung von Pfählen in der Verticalebene ABx, deren Köpfe die parallel zu Ax gehende Linie sB bilden, ausgesteckt, so kann zur Planirung des Terrains nach der Linie Ax geschritten werden. Zu diesem Ende läßt man in einer entsprechenden Breite um die Pfähle 1, 2, 3 und 4 herum so viel Erde weggraben als nöthig ist, um, überall von no die Höhe An zu erhalten, was sich leicht, mittelst eines Maßstabes = An, untersuchen läßt. Dagegen füllt man an den Pfählen 6 und 7 so viel Erde auf, bis dieselben nur in einer Länge von rv = An — ro über dem festgestampften Erdboden hervortreten. An den Pfählen 9 und 10 ist aber wiederum Erde wegzustechen, und zwar von der Visirlinie sB ab in einer Höhe sp + pq. Auf diese Weise erhält man die verlangte Planirung der Schußfläche in der Richtung Ax, wobei man an den Seiten und an einzelnen fehlerhaften Stellen, theils nach dem Augenmaße, theils aber auch mittelst des Richtscheits und der Setzwage nachhilft.

Gedruckt bei Julius Sittenfeld, Burgstraße No. 25.

Druckfehler.

Seite	22	Zeile	2 v. o.	steht §. 34. 18	soll heißen §. 34. 20
"	91	"	17 v. o.	" Nullen	" " Stellen
"	93	"	9 v. o.	" 3,060	" " 3,006
"	105	"	8 v. u.	" + 2e	" " — 3e
"	107	"	8 v. u.	" (a + b)	" " (a — b)
"	108	"	14 v. o.	" 3	" " 3c
"	123	"	16 v. u.	" §. 126	" " §. 116
"	142	"	9 v. o.	" 4000	" " 4500
"	143	"	4 v. o.	" 80	" " 1800
"	152	"	4 v. u.	" b	" " c
"	177	"	2 v. u.	" 488	" " 448
"	180	"	18 v. o.	" 25	" " 24
"	181	"	7 v. u.	" Fuß	" " Pfund
"	237	"	19 v. o.	steht in mehreren Exemplaren 2R statt R.	

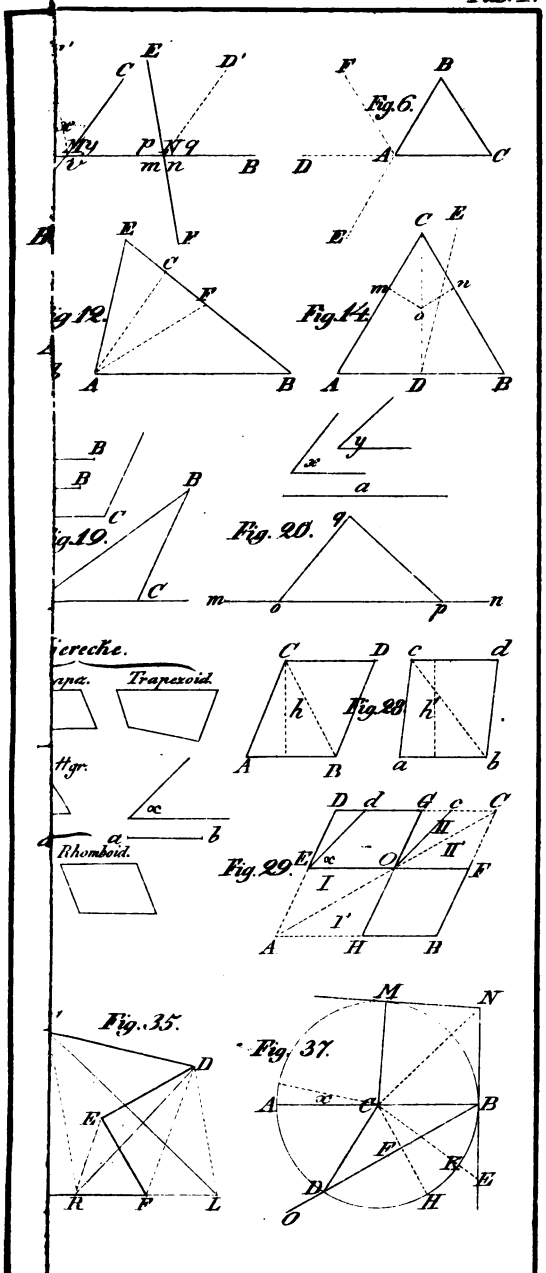
Tab. I.



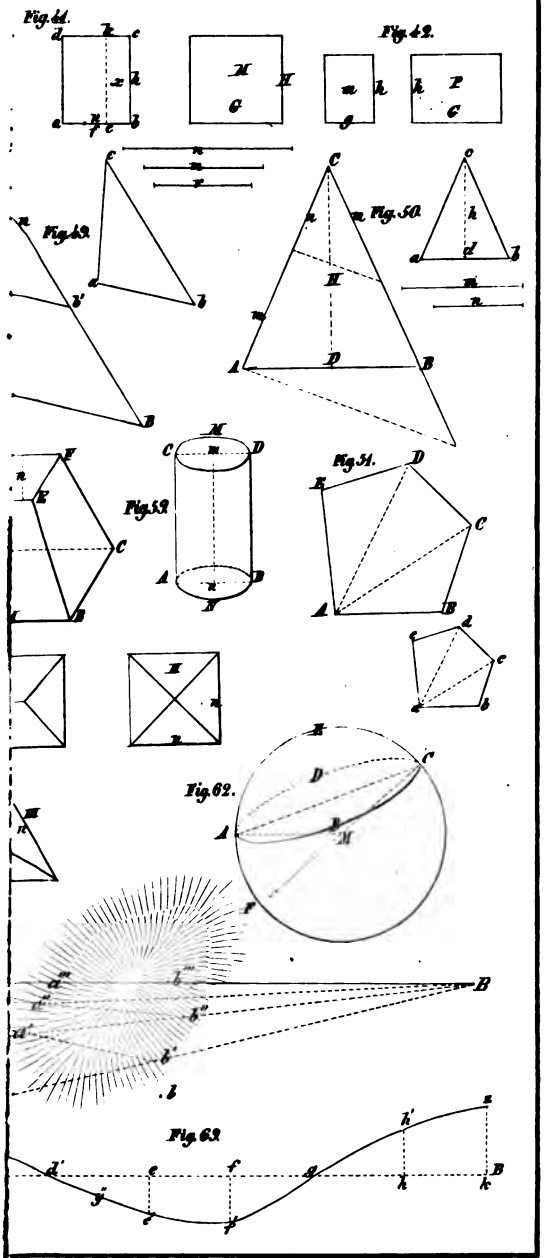
Obafauerwerker Pletsch gest.

Druckfehler.

Seite	22	Zeile	2	v. o.	steht	§. 34. 18	soll heißen §. 34. 20
"	91	"	17	v. o.	"	Nullen	" " Stellen
"	93	"	9	v. o.	"	3,060	" " 3,006
"	105	"	8	v. u.	"	$+2e$	" " $-3e$
"	107	"	8	v. u.	"	$(a+b)$	" " $(a-b)$
"	108	"	14	v. o.	"	3	" " $3c$
"	123	"	16	v. u.	"	§. 126	" " §. 116
"	142	"	9	v. o.	"	4000	" " 4500
"	143	"	4	v. o.	"	80	" " 1800
"	152	"	4	v. u.	"	b	" " c
"	177	"	2	v. u.	"	488	" " 448
"	180	"	18	v. o.	"	25	" " 24
"	181	"	7	v. u.	"	Fuß	" " Pfund
"	237	"	19	v. o.	steht in mehreren Exemplaren 2R statt R.		



Obafnerverlag Plötsch gest.



Oberfeuerwerker Plätsch gest.

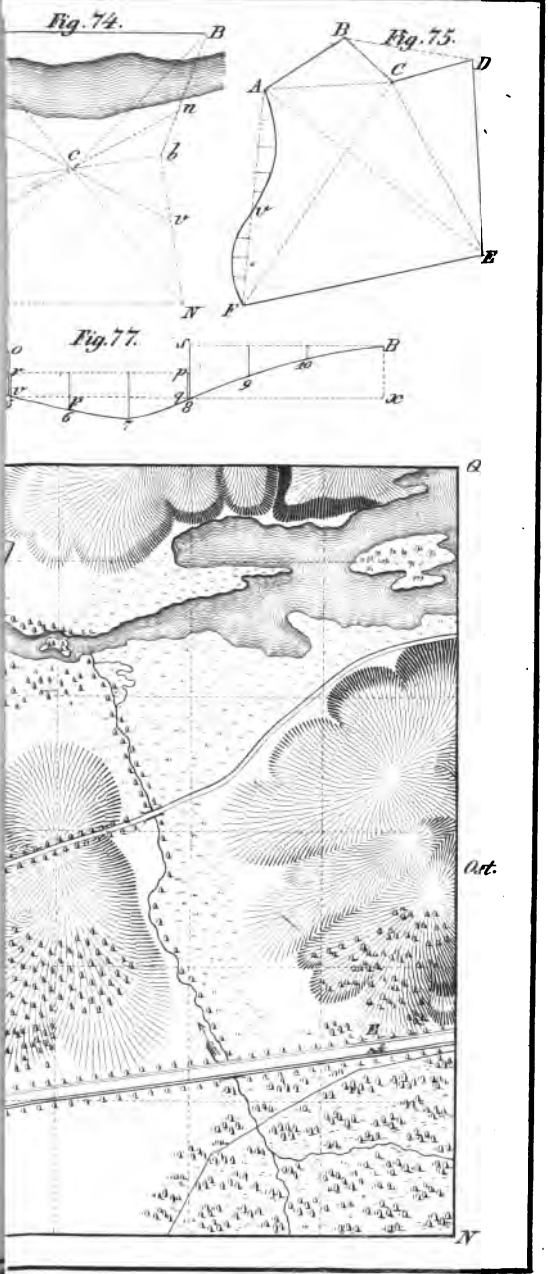
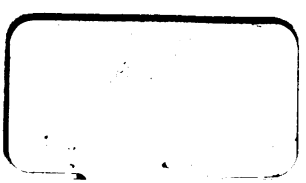


Fig. 74.
B
n
c
b
v
N
Fig. 75.
B
C
D
A
v
E
F
Fig. 77.
B
p
q
x
Q
Ort.
N

MAR 27 1952